Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Mai 2007

10. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
$(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ sei eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$. Konstruieren Sie daraus eine ganzzahlige Lösung (x_1, y_1) der Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
M sei eine 2×2-Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

a) Zeigen Sie: $Q = {}^tMM$ ist eine symmetrische Matrix!

b) Falls $\det M \neq 0$, ist die quadratische Form zu Q positiv definit.

c) Bestimmen Sie für den Fall $\det Q = 1$ alle ganzen Zahlen, die durch die quadratische Form zu $Q = {}^tMM$ dargestellt werden können!

Aufgabe 3: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 41y^2 = 1$!

b) Der indische Mathematikers Brahmagupta (598-670), in dessen 628 erschienenen Werk *Brahmasphutasiddhanta* viele Pellsche Gleichungen vorkommen, sagte: Wer innerhalb eines Jahres eine Lösung der Gleichung $x^2 - 92y^2 = 1$ in natürlichen Zahlen findet, ist ein Mathematiker. Inzwischen sind die Zeiten härter geworden: Finden Sie bis zum Abgabeschluß dieses Übungsblatts ohne Probieren zwei solche Lösungen!

c) Interpretieren Sie Ihre Lösungen als Einheiten eines quadratischen Zahlkörpers und diskutieren Sie, soweit dies ohne Rechnung möglich ist, ob eine davon die Grundeinheit sein kann!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für zwei zueinander teilerfremde ganze Zahlen a, b gibt es stets ganze Zahlen c und d, so daß die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ Determinante eins hat!

a) Sind die quadratischen Formen zu $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ und $Q_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ äquivalent?

b) Sind die quadratischen Formen zu Q_2 und $Q_3 = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ äquivalent?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 16. Mai 2007, um 13.45 Uhr