

2. Mai 2007

## 9. Übungsblatt Zahlentheorie

### Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Finden Sie (ohne Computer oder sonstiges stumpfsinniges Ausprobieren) alle Darstellungen von 10 000 als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen!
- b) *ditto* für 810 000.

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Schreiben Sie 65 als Produkt irreduzibler Elemente von  $\mathbb{Z}[i]$  !
- b) Finden Sie alle Darstellungen von 65 als Summe zweier Quadrate!
- c) Leiten Sie daraus eine Formel für  $\pi$  ab, und berechnen Sie über die zugehörige Potenzreihenentwicklung die Zahl  $\pi$  mit einer Genauigkeit von mindestens fünf Dezimalstellen!

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß für jede ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  auch  $k = \frac{1}{6}(m - m^3)$  ganz ist und daß gilt

$$m = m^3 + (k + 1)^3 + (k - 1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3 !$$

- b) Läßt sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens fünf *positiven* dritten Potenzen darstellen?

### Aufgabe 4: (4 Punkte)

$P(x_1, \dots, x_n)$  sei ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . Zeigen Sie: Es gibt ein Polynom  $Q(y_1, \dots, y_m)$  in einer gewissen Anzahl  $m$  von Variablen derart, daß  $Q(y_1, \dots, y_m) = 0$  genau dann eine Lösung mit  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}$  hat, wenn  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  eine Lösung mit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  hat!