Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

25. April 2007

8. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie alle zu $a+bi \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}i$ assoziierten Elemente von $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}i$!

b) Die ungeraden Zahlen $n \neq m$ seien durch $n = a^2+b^2$ und $m = c^2+d^2$ dargestellt als Summen zweier Quadrate. Finden Sie zwei verschiedene Darstellungen ihres Produkts nm als Summe zweier Quadrate!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl n mit $n \equiv 7 \bmod 8$ läßt sich nicht als Summe dreier Quadrate darstellen.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Quaternion $\dfrac{1}{1+i+j+k}$!

b) Dem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ werde die Quaternion $q_{\vec{v}} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ zugeordnet. Drücken Sie das Produkt $q_{\vec{v}} q_{\vec{w}}$ zweier solcher Quaternionen aus durch das Vektor- und das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$!

c) Bestimmen Sie alle Quaternionen q mit $q^2 = -1$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Eine Quaternion $a+ib+jc+kd$ heiße *ganz,* wenn $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind; sie heiße *Einheit,* wenn zusätzlich auch ihr multiplikatives Inverses ganz ist. Sie heiße *irreduzibel,* wenn sie nicht als Produkt zweier ganzer Quaternionen geschrieben werden kann, von denen keine eine Einheit ist.

a) Bestimmen Sie alle Einheiten unter den Quaternionen.

b) Zeigen Sie, daß $1\pm 2i$, $1\pm 2j$ und $1\pm 2k$ irreduzibel sind!

c) Im Ring der ganzen Quaternionen ist

$$\begin{aligned} 5 &= (1+2i)(1-2i) = (1+2j)(1-2j) = (1+2k)(1-2k) \\ &= (2+i)(2-i) = (2+j)(2-j) = (2+k)(2-k)\,. \end{aligned}$$

Gibt es irgendwelche zwei unter den zwölf Faktoren in diesen Zerlegungen, die sich nur durch eine Einheit unterscheiden?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 2. Mai 2007, um 13.45 Uhr