Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

18. April 2007

7. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie in $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ ein Element z, so daß für alle $q \in \mathcal{O}_{-13}$ gilt $N(z-q) > 1$!

b) Finden Sie in $\mathcal{O}_{-13}$ zwei Elemente x, y derart, daß es keine Elemente $q, r \in \mathcal{O}_{-13}$ gibt mit $x = qy + r$ und $N(r) < N(y)$!

c) Könnte $\mathcal{O}_{-13}$ bezüglich einer anderen Funktion $\nu\colon \mathcal{O}_{-13} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ ein Euklidischer Ring sein?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Dividieren Sie in $\mathcal{O}_{-2}$ die Zahl $1 + 5\sqrt{-2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{-2}$!

b) Dividieren Sie in $\mathcal{O}_{-3}$ die Zahl 2 mit Rest durch $1 + \sqrt{-3}$!

c) Dividieren Sie in $\mathcal{O}_{2}$ die Zahl $1 + 5\sqrt{2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{2}$!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) p sei eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ von natürlichen Zahlen, die die Gleichung $x^2 - y^2 = p$ erfüllen!

b) Finden Sie eine natürliche Zahl n derart, daß die Gleichung $x^2 - y^2 = n$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ hat!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie mindestens fünf Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$!

b) Was können Sie über die Einheitengruppe von $\mathcal{O}_3$, der Hauptordnung von $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ sagen?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 25. April 2007, um 13.45 Uhr