Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

14. März 2007

4. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie den diskreten Logarithmus von 10 modulo 19 zur Basis 13 !

b) Zeigen Sie, daß es modulo 17 keinen derartigen diskreten Logarithmus gibt!

c) p sei eine Primzahl. Für welche $a \in \mathbb{F}_p^\times$ hat jedes $x \in \mathbb{F}_p^\times$ eines diskreten Logarithmus zur Basis a ?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Das siderische Jahr, d.h. die Dauer des Umlaufs der Erde um die Sonne, dauert 365,256360 Tage.

a) Berechnen Sie die ersten fünf Koeffizienten a_i der Kettenbruchentwicklung dieser Zahl!

b) Mit wie vielen Schaltjahren pro $100n$ Jahren kann man die Konvergenten dieser Kettenbruchentwicklung annähern? Vergleichen Sie mit den Schaltjahrregeln des Julianischen (alle durch vier teilbaren Jahre) und des Gregorianischen Kalenders (*ditto,* außer den durch hundert teilbaren, die nicht durch vierhundert teilbar sind, es sei denn, sie seien durch Tausend teilbar)!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{11}$!

b) Berechnen Sie für die Kettenbruchentwicklung von

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \approx 2{,}71828182845904523536$$

die ersten zehn Koeffizienten a_i und versuchen Sie, eine Regel zu erraten! (Diese Regel muß nicht bewiesen werden.)

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Als *irrationalste* Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt nach vorherrschender Einschätzung die, die sich am schwersten durch rationale Zahlen approximieren läßt, d.h. die, für die die Nenner der Konvergenten der Kettenbruchentwicklung am langsamsten wachsen. Da dann auch die Koeffizienten a_i möglichst klein sein müssen, ist

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}} .$$

ein offensichtlicher Kandidat.

a) Geben Sie x in einer konventionellen Form exakt an!

b) Können Sie eine andere Zahl angeben, bei der die Differenzen zur n-ten Konvergente der Kettenbruchentwicklung genauso groß sind?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 21. März 2007, um 13.45 Uhr