

21. Februar 2007

1. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie: $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} < \frac{1}{n}$ *Hinweis:* Schätzen Sie ab durch eine geometrische Reihe!
- b) Schreiben Sie $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \frac{a_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe von a), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_n}{n!} < e < \frac{a_n + 1}{n!}$$

- c) Folgern Sie, daß $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen und stellen Sie diese als ganzzahlige Linearkombinationen der Ausgangszahlen dar:

- a) 17 und 81 b) 15 und 1005 c) 1234 und 4321

Aufgabe 3: (4 Punkte)

In einem Studentenwohnheim leben 90 Studenten; sie kommen aus Deutschland, Italien und der Schweiz. Jeder verhält sich bezüglich seines Bierkonsums genau wie der Durchschnitt seiner Landsleute, deren Verbrauch laut www.nationmaster.com im Jahr 2002 jeweils 119 l (D), 57 l (CH) und 29 l (I) waren. Im Wohnheim wurden 9308 l getrunken. Wie viele Angehörige der einzelnen Nationen wohnten dort?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

- a) Für zwei natürliche Zahlen $a \geq b$ braucht man Tausend Divisionen, um $\text{ggT}(a, b)$ nach dem EUKLIDischen Algorithmus zu berechnen. Wie viele Dezimalstellen hat b mindestens?
- b) Gibt es auch Zahlen \tilde{a} und \tilde{b} mit jeweils einer Dezimalstelle mehr, so daß der EUKLIDische Algorithmus genau Tausend Divisionen benötigt?

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Die Folge der Zahlen x_n sei definiert durch

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Finden Sie eine explizite Formel für x_n !