Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(1+1 Punkte)* Berechnung der Plotkin-Schranke.
Sei $\mathcal{C}$ ein $(13, M, 5)$-Code über $\mathbb{F}_2$. Es sollen in dieser Aufgabe möglichst gute obere Schranken für $|\mathcal{C}| = M$ bestimmt werden.

   (a) Berechnen Sie eine obere Schranke mit Satz 11.9 aus dem Skript.

   (b) Überlegen Sie, ob sich die obere Schranke durch Einsatz von Aufgabe 3(a) aus Übungsblatt 12 noch verbessern lässt.

Lösung:

(a) Es ist $n = 13$ und $d = 5$. Da $d \leq n\frac{q-1}{q}$ ist, wird nicht Satz 11.9(a) sondern Satz 11.9(c) angewandt. (Bei Teil (a) des Satzes würde ansonsten in der Abschätzung ein negativer Wert im Nenner entstehen.) Es ergibt sich $n' := \left[\frac{q}{q-1}(d-1)\right] = [2 \cdot 4] = [8] = 8$. Damit ist dann

$$A_q(n, d) \leq q^{n-n'} \cdot \frac{d}{d - n' \cdot \frac{q-1}{q}} = 2^{13-8} \cdot \frac{5}{5 - 8 * 1/2} = 160$$

(b) Aus Aufgabe 3(a) von Übungsblatt 12 ergibt sich $A_2(13, 5) = A_2(14, 6)$. Damit ist nach Satz 11.9(c): $n' := \left[\frac{2}{1}(6-1)\right] = 10$

$$A_q(n, d) \leq q^{n-n'} \cdot \frac{d}{d - n' \cdot \frac{q-1}{q}} = 2^{14-10} \cdot \frac{6}{6 - 10 * 1/2} = 96$$

Man erhält also eine deutlich bessere obere Schranke mit diesem Vorgehen.

2. *(2+2,5 Punkte)* Berechnung von oberen und unteren Schranken.
Sei $\mathcal{C}$ ein $(17, M, 8)$-Code über $\mathbb{F}_2$. Berechnen Sie die die Ihnen bekannten oberen und unteren Schranken für M (Singelton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov).

   (a) Geben Sie damit eine obere und untere Grenze für $A(17, 8)$ an.
   (Hinweise: Es ist $V_2(17, 7) = 41226$ und $V_2(17, 3) = 834$. Beachten Sie, dass bei der Hamming Schranke d ungerade sein muss. Führen Sie eine einfache Abschätzung durch, um sie dennoch nutzen zu können.)

   (b) Was geschieht mit den (Singelton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov, Tsfasman/Vladut/Zink) Schranken für den Fall beliebig langer Codes und annähernd gleich bleibender Fehlerkorrekturleistung? Berechnen Sie dazu für die aufgeführten Schranken jeweils $\alpha_2(\delta)$ mit $\delta = 8/17$. Falls sich eine Schranke nicht berechnen lässt begründen Sie das.

Lösung:

(a) i. **Singelton:** $A_2(17, 8) \leq 2^{17-8+1} = 1024$

ii. **Plotkin:** (mit 11.9(c)) ist $n' = 14$ und damit $A_2(17, 8) \leq 2^{17-14}\frac{8}{8-14*1/2} = 64$

iii. **Hamming:** In Satz 11.8 ist d als ungerade vorausgesetzt. Da aber $A_q(n, d) \leq A_q(n, d-1)$ ist, folgt damit:

$$A_2(17, 8) \leq A_2(17, 7) \leq \frac{2^{17}}{V_2(17, 3)} \approx 157$$

iv. **Gilbert-Varshamov:** $A_2(17,8) \geq \frac{2^{17}}{V_2(17,7)} \approx 3,18$

Damit folgt $4 \leq A_2(17,8) \leq 64$.

(b) i. **Singelton:** $\alpha_2(8/17) \leq 1 - 8/17 = 9/17$.
(Erinnerung: $\frac{9}{17}$ bezeichnet hier die Informationsrate $R = \frac{log_q|\mathcal{C}|}{n}$.)

ii. **Plotkin:** $\alpha_2(8/17) \leq 1 - 2 * \delta = 1/17$

iii. **Hamming:** $\alpha_2(8/17) \leq 1 - H_2(\frac{4}{17}) = 1 + (\frac{4}{17})log_2(\frac{4}{17}) + (\frac{13}{17})log_2(\frac{13}{17}) \approx 0,21$

iv. **Gilbert-Varshamov:** $\alpha_2(8/17) \geq 1 - H_2(\frac{8}{17}) \approx 0,0025$

v. **Tsfasman/Vladut/Zink:** hier keine Berechnung möglich, da 2 keine Quadratzahl.

3. *(0,5+0,5+0,5 Punkte)* Begründen Sie:

(a) Kann man einen Code konstruieren, dessen Informationsrate unterhalb der Gilbert-Varshamov-Schranke liegt?

(b) Kann man einen Code konstruieren, dessen Informationsrate oberhalb der Plotkin-Schranke liegt?

(c) Kann man *immer* einen Code konstruieren, dessen Informationsrate unterhalb einer (beliebigen) oberen Schranke liegt?

Lösung:

(a) ja

(b) nein, da es eine obere Schranke ist

(c) ja

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter `http://hilbert.math.uni-mannheim.de/cod07-1.html` zu finden.

Abgabe bis Freitag, 01. Juni 2007, 16 Uhr (Kasten im Eingangsbereich A5).
Alternativ: Bis 13.15 Uhr am Montag, 04. Juni 2007 direkt am Lehrstuhl.