

Die Dimension des jeweiligen Eigenraums, die geometrische Vielfachheit also, war genauso groß, jedoch muß dies im allgemeinen nicht der Fall sein: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etwa hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

die doppelte Nullstelle eins,  $\lambda = 1$  ist also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei. Der zugehörige Eigenraum ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0x_1 + 1x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0, \end{aligned}$$

also gerade die Menge aller Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  und somit eindimensional. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist daher nur eins.

Das Beispiel der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \\ y \cos \vartheta + x \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

zeigt, daß es überhaupt keine Eigenwerte geben muß, denn hier ist das charakteristische Polynom gleich

$$\begin{vmatrix} \cos \vartheta - \lambda & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos \vartheta - \lambda)^2 + \sin^2 \vartheta.$$

Abgesehen vom Fall  $\sin \vartheta = 0$ , wenn  $A$  gleich der positiven oder negativen Einheitsmatrix ist, hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle, da es nur positive Werte annimmt. Es hat aber natürlich die beiden komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta = e^{\pm i \vartheta};$$

fassen wir  $\varphi$  als Abbildung von  $\mathbb{C}^2$  nach  $\mathbb{C}^2$  auf, gibt es also zwei Eigenwerte. Beide haben die algebraische und geometrische Vielfachheit eins; zugehörige Eigenvektoren sind etwa  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ . Wählen wir diese beiden Vektoren als Basis, so wird die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich dieser neuen Basis zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenvektoren

**Satz:** a) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

b) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte einer linearen Abbildung ist kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums.

**Beweis:** a) Der Eigenwert  $\lambda$  der  $n \times n$ -Matrix  $A$  habe die geometrische Vielfachheit  $r$ , d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension  $r$ . Wir wählen eine Basis  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$  dieses Eigenraums und ergänzen sie zu einer Basis des gesamten Vektorraums; bezüglich dieser Basis sei  $C$  die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{v} \mapsto A\vec{v} \end{cases}.$$

Da  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  sind, ist  $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda \vec{b}_i$ . In den ersten  $r$  Spalten von  $C$  steht also jeweils in der Diagonalen das Element  $\lambda$  und ansonsten überall die Null.  $A$  hat somit die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \end{pmatrix},$$

$M$

wobei uns weder die mit \* bezeichneten Körperelemente noch die  $(n-r) \times (n-r)$ -Matrix  $M$  weiter zu interessieren brauchen.

Für  $C - xE$  gilt dasselbe, nur daß jetzt  $\lambda - x$  in der Diagonalen steht, d.h. diese Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} - x\mathbf{E}_{n-r}$$

wobei  $E_{n-r}$  die  $(n-r) \times (n-r)$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Zur Berechnung ihrer Determinanten verwenden wir den LAPLACESchen Entwicklungssatz: Da in der ersten Zeile (oder Spalte) nur an der ersten Stelle ein von Null verschiedener Eintrag steht, ist diese Determinante gleich  $(\lambda - x)$  mal der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Falls  $r > 1$  ist, hat diese neue Matrix dieselbe Form, wir können den LAPLACESchen Entwicklungssatz also noch einmal anwenden usw.; wir erhalten schließlich

$$\det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r}).$$

Somit ist  $\det(C - xE)$  durch  $(x - \lambda)^r$  teilbar.

Was uns wirklich interessiert, ist aber nicht  $\det(C - xE)$ , sondern  $\det(A - xE)$ . Ist  $B$  die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis des  $k^n$  auf die Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ , jene Matrix also, deren Spaltenvektoren die  $\vec{b}_i$  sind, so ist  $C = B^{-1}AB$  und

$$\begin{aligned} \det(C - xE) &= \det(B^{-1}AB - xE) = \det(B^{-1}AB - xB^{-1}EB) \\ &= \det(B(A - xE)B^{-1}) = \det B \det(A - xE) (\det B)^{-1} \\ &= \det(A - xE). \end{aligned}$$

$A$  und  $C$  haben also dasselbe charakteristische Polynom, und somit ist auch das charakteristische Polynom von  $A$  durch  $(x - \lambda)^r$  teilbar. Die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  ist daher mindestens  $r$ .

Unabhängig von diesem Ergebnis wollen wir noch festhalten, daß nach der gerade durchgeführten Rechnung für eine beliebige Matrix  $A$  und eine invertierbare Matrix  $B$  die beiden Matrizen  $A$  und  $BAB^{-1}$  dasselbe charakteristische Polynom haben; insbesondere haben also die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung zu verschiedenen Basen dasselbe charakteristische Polynom.

b) Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  die verschiedenen Eigenwerte von  $\varphi$  und sind  $r_1, \dots, r_\ell$  ihre algebraischen Vielfachheiten, so ist das charakteristische Polynom  $\det(A - xE)$  teilbar durch

$$(x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad  $r_1 + \dots + r_\ell$ , wohingegen das charakteristische Polynom Grad  $n$  hat; daher ist

$$r_1 + \dots + r_\ell \leq n,$$

denn der Grad eines Teilers kann nicht größer sein als der des Polynoms selbst. ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch ein Kriterium angegeben, wann es für eine lineare Abbildung  $\varphi$  eine Basis aus Eigenwerten gibt, wann also die Abbildungsmatrix bezüglich einer geeigneten Basis Diagonalgestalt hat:

**Satz:** Zur linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von  $\varphi$ , wenn 1.) das charakteristische Polynom von  $\varphi$  als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann

2.) die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der algebraischen ist.

*Beweis:* Zunächst sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung derart, daß  $V$  eine Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$  habe. Wir müssen zeigen, daß 1.) und 2.) erfüllt sind.

Da die Basisvektoren  $\vec{b}_i$  Eigenvektoren sind, gibt es zu jedem  $\vec{b}_i$  ein Körperelement  $\lambda_i$ , so daß  $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i$  ist; bezüglich dieser Basis hat die

Abbildungsmatrix  $A$  von  $\varphi$  daher Diagonalgestalt, und das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$$

zerfällt in der Tat in Linearfaktoren. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda_i$  ist gleich der Anzahl jeder Indizes  $j \in \{1, \dots, n\}$ , für die  $\lambda_j = \lambda_i$  ist; dies ist auch die geometrische Vielfachheit, denn der Eigenraum wird aufgespannt von den Vektoren  $\vec{b}_j$  zu diesen  $j$ . Also sind  $1)$  und  $2)$  erfüllt.

Umgekehrt erfülle die Abbildung  $\varphi$  die Bedingungen  $1)$  und  $2)$ ; wir müssen zeigen, daß es eine Basis aus Eigenvektoren von  $\varphi$  gibt.

Wegen  $1)$  läßt sich das charakteristische Polynom in der Form

$$(\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_s - \lambda)^{r_s}$$

schreiben, wobei wir annehmen können, daß die  $\lambda_i$  paarweise verschiedenen sind. Dann ist  $r_i$  die algebraische Vielfachheit von  $\lambda_i$ . Da das charakteristische Polynom den Grad  $n$  hat, folgt, daß

$$r_1 + \cdots + r_s = n$$

ist. Außerdem gibt es wegen  $2.)$  zu jedem  $\lambda_i$  einen  $r_i$ -dimensionalen Eigenraum, also  $r_i$  linear unabhängige Eigenvektoren. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nach dem Lemma vom Anfang dieses Abschnitts stets linear unabhängig sind, ist auch das System all dieser Eigenvektoren linear unabhängig und somit eine Basis, denn es besteht aus  $n = \dim V$  Vektoren. Damit ist eine Basis aus Eigenvektoren von  $\varphi$  gefunden. ■

**e) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen**

Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, kann die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner sein als die algebraische, und im Falle einer reellen Matrix müssen nicht auch die Eigenwerte reell sein. In diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß solche Dinge bei symmetrischen

(und auch den noch zu definierenden HERMITESCHEN) Matrizen nicht möglich sind.

Symmetrische und HERMITESCHE Matrizen hängen eng mit (HERMITESCHEN) Skalarprodukten zusammen: Für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{b}_i$$

aus einem endlichdimensionalen EUKLIDISCHEN Vektorraum  $V$  mit Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  ist wegen der Linearität des Skalarprodukts in beiden Argumenten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left( \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n w_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j.$$

Setzen wir

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j,$$

so ist wegen der Symmetrie des Skalarprodukts  $c_{ij} = c_{ji}$ , wir haben also eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $C$ .

Die Matrix  $C$  legt das Skalarprodukt eindeutig fest, denn für zwei beliebige Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  wie oben ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \cdot c_{ij}.$$

Diese Formel definiert umgekehrt auch für jede symmetrische Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine bilineare Abbildung  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , allerdings muß diese nicht positiv definit und damit kein Skalarprodukt sein.

Ist  $V$  ein HERMITESCHER Vektorraum, wieder mit Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ , so ist jetzt für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{b}_i \quad \text{mit} \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left( \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n w_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \bar{w}_j \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j.$$

Setzen wir auch hier wieder

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j,$$

so ist nun  $c_{ij} = \bar{c}_{ji}$ . Matrizen mit dieser Eigenschaft wollen wir als HERMITESCH bezeichnen.

Um dies etwas kompakter ausdrücken zu können, definieren wir

**Definition:** a) Für eine Matrix  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  bezeichnen wir die Matrix  $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$  als die zu  $A$  konjugiert komplexe Matrix.

b)  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt HERMITESCH, falls  ${}^t A = \bar{A}$  ist.

c) Zu einem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  heißt  $\bar{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$  der konjugiert komplexe Vektor.

(Letztere Schreibweise sieht zwar grausam aus, läßt sich aber nicht vermeiden, wenn man Vektoren mit Pfeilen kennzeichnet. Alternativen wie der Fettdruck von Vektoren funktionieren weder an der Tafel noch in einer Mitschrift, und für Frakturbuchstaben wie u, v, w können sich leider nur wenige Studenten begeistern.)

Schließlich wollen wir Vektoren hier mit  $1 \times n$ -Matrizen identifizieren; insbesondere rechnen wir mit dem „transponierten Vektor“

$${}^t \vec{v} = (v_1, \dots, v_n).$$

Mit dieser Bezeichnung kann das Standardskalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  als Matrixprodukt  ${}^t \vec{v} \vec{w}$  geschrieben werden; das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$  ist entsprechend  ${}^t \vec{v} \bar{\vec{w}}$ .

Da die komplexe Konjugation auf  $\mathbb{R}$  keine Wirkung hat, ist eine HERMITESCHE Matrix mit reellen Einträgen einfach eine symmetrische Matrix; wir können uns im folgenden bei den Beweisen daher auf HERMITESCHE Matrizen beschränken und erhalten trotzdem Ergebnisse, die auch für reelle symmetrische Matrizen gelten.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist

**Satz:**  $A$  sei eine symmetrische reelle oder HERMITESCHE (komplexe) Matrix.

- a) Dann sind alle Eigenwerte von  $A$  reell.
- b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Standard-  $b_{ZW}$ . HERMITESCHEN Skalarprodukts.
- c) Für jeden Eigenwert von  $A$  ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
- d)  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $A$ .

*Beweis:* a) Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $A$ , so gibt es nach Definition einen Vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , so daß  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  ist. Da die komplexe Konjugation mit sämtlichen Grundrechenarten vertauschbar ist, folgt, daß

$$\bar{A}\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}},$$

d.h.

$${}^t \bar{A} \bar{\vec{v}} = {}^t \bar{\lambda} \bar{\vec{v}} = \bar{\lambda} {}^t \bar{\vec{v}}.$$

Bislang gilt alles noch für beliebige  $b \times n$ -Matrizen; um die Symmetrie bzw. HERMITE-Eigenschaft von  $A$  ins Spiel zu bringen, betrachten wir den Vektor  ${}^t(A\vec{v}) = {}^t \vec{v} {}^t A$ . Da nach Voraussetzung  ${}^t A = \bar{A}$  ist, können wir die rechte Seite der Gleichung auch als  ${}^t \vec{v} \bar{A}$  schreiben, und die linke Seite als  ${}^t(\lambda\vec{v}) = \lambda {}^t \vec{v}$ , da  $\vec{v}$  Eigenvektor von  $A$  ist. Somit können wir die Zahl  ${}^t \vec{v} \bar{A} \vec{v}$  auch schreiben als

$${}^t \bar{A} \vec{v} = ({}^t \bar{A} \vec{v}) \vec{v} = \lambda {}^t \vec{v} \vec{v}.$$

Somit haben wir die beiden Darstellungen

$${}^t \bar{A} \vec{v} = \lambda {}^t \vec{v} \vec{v} \quad \text{und} \quad {}^t \bar{A} \vec{v} = \bar{\lambda} {}^t \vec{v} \vec{v},$$

die nur dann beide richtig sein können, wenn  $\lambda = \bar{\lambda}$  und somit reell ist; denn  ${}^t \vec{v} \vec{v}$  kann wegen der Definitheit HERMITESCHER Skalarprodukte für einen Vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  nicht verschwinden.

b)  $\vec{v}$  sei Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , und  $\vec{w}$  sei Eigenvektor zum davon verschiedenen Eigenwert  $\mu$ , d.h.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad A\vec{w} = \mu\vec{w} \quad \text{und} \quad \lambda \neq \mu.$$

Dann ist

$$\lambda {}^t \vec{v} \vec{w} = {}^t(\lambda\vec{v}) \vec{w} = {}^t(A\vec{v}) \vec{w} = {}^t \vec{v} {}^t A \vec{w} = {}^t \vec{v} \bar{A} \vec{w} = {}^t \bar{A} \vec{w} = {}^t \bar{\mu} \vec{w} = \bar{\mu} {}^t \vec{v} \vec{w}.$$

Wie wir schon wissen, sind alle Eigenwerte reell, d.h.  $\bar{\mu} = \mu \neq \lambda$ . Die obige Gleichungskette kann daher nur richtig sein, wenn  ${}^t\bar{v}\bar{w}$  verschwindet, d.h. wenn  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  orthogonal sind.

Beim Beweis von c) gehen wir im wesentlichen genauso vor wie im vorigen Abschnitt, als wir zeigten, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets kleiner oder gleich der algebraischen ist; die zusätzliche Annahme über die Matrix  $A$  wird zeigen, daß hier die beiden Vielfachheiten sogar gleich sind.

$\lambda$  sei also ein Eigenwert von  $A$  mit geometrischer Vielfachheit  $r$ , d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension  $r$ . Wir wählen eine Basis  $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r\}$  davon und ergänzen sie zu einer Basis  $\mathcal{B} = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$  des gesamten Vektorraums  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$ . Indem wir nötigenfalls das GRAM-SCHMIDTSche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und anschließend die Längen aller Vektoren auf eins normieren, können wir annehmen, daß es sich dabei um eine Orthonormalbasis handelt.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi: V \rightarrow V; \quad \bar{v} \mapsto A\bar{v}.$$

Bezüglich der Standardbasis hat sie  $A$  als Abbildungsmatrix; für uns interessanter ist aber die Abbildungsmatrix  $C$  bezüglich der neuen Basis  $\mathcal{B}$ . Dazu sei  $B$  die Matrix mit Spaltenvektoren  $\bar{b}_i$ ; da der Eintrag an der Stelle  $(i, j)$  eines Matrixprodukts das (Standard-)Skalarprodukt des  $i$ -ten Zeilenvektors des ersten Faktors mit dem  $j$ -ten Spaltenvektor des zweiten Faktors ist, steht an der Stelle  $(i, j)$  der Matrix  ${}^tB\bar{B}$  das (Standard) HERMITESche Produkt der Vektoren  $\bar{b}_i$  und  $\bar{b}_j$ . Da  $\mathcal{B}$  als Orthonormalbasis gewählt wurde, ist daher

$${}^tB\bar{B} = E \quad \text{und damit} \quad {}^tB = \bar{B}^{-1} = \overline{B^{-1}}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß mit  $A$  auch  $C$  eine HERMITESche Matrix ist, denn

$${}^tC = ({}^tB^{-1}AB) = {}^tB {}^tA {}^tB^{-1} = \overline{B^{-1}} \overline{A} \overline{B} = \overline{B^{-1}AB} = \overline{C}.$$

Die ersten  $r$  Basisvektoren  $\bar{b}_i$  sind Eigenvektoren von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ ; für  $i \leq r$  ist daher  $\varphi(\bar{b}_i) = \lambda\bar{b}_i$ , d.h. in der  $i$ -ten Spalte von  $C$

steht an der  $i$ -ten Stelle die reelle Zahl  $\lambda$  und ansonsten überall die Null, genau wie auch im vorigen Abschnitt. Im Gegensatz zu dort haben wir nun aber eine HERMITESche Matrix; da in der  $i$ -ten Spalte abgesehen von  $\lambda$  auf der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, muß daher dasselbe auch für die  $i$ -te Zeile gelten; die Matrix  $C$  hat also die Form

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \quad M$$

wobei  $M$  eine  $(n-r) \times (n-r)$ -Matrix ist, die uns nicht weiter zu interessieren braucht. Damit hat  $C - xE$  die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \quad M - xE_{n-r}$$

wobei  $E_{n-r}$  die  $(n-r) \times (n-r)$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Wie wir uns schon im vorigen Abschnitt überlegten beim Beweis, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer kleiner oder gleich der algebraischen ist, haben  $A$  und  $C$  dasselbe charakterische Polynom; da wir die Matrix  $C$  besser kennen, rechnen wir mit ihr.

Wie in Abschnitt d) folgt auf Grund der obigen Form der Matrix  $C - xE$  aus dem LAPLACESchen Entwicklungssatz, daß

$$\det(A - xE) = \det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})$$

ist, wobei  $E_{n-r}$  die  $(n-r) \times (n-r)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  genau gleich  $r$  ist, daß also  $\lambda$  keine Nullstelle von  $\det(M - xE_{n-r})$  sein kann.

Wäre  $\lambda$  Nullstelle von  $\det(M - xE_{n-r})$ , so hätte  $M$  den Eigenwert  $\lambda$ , es gäbe also einen  $(n-r)$ -dimensionalen Eigenvektor  $\vec{w}$  von  $M$ . Wegen der speziellen Form der Matrix  $C$  ist für jeden Eigenvektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{von } M \text{ der Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $C$  und damit von  $A$  – Eigenvektoren hängen schließlich nur von der linearen Abbildung ab, nicht von einer speziellen Abbildungsmatrix. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$  von  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$  erzeugt wird, denn  $\vec{v}$  ist linear unabhängig von diesen  $\vec{b}_i$ .

Also hat  $\lambda$  die algebraische Vielfachheit  $r$ , und  $c$ ) ist gezeigt.

$d$ ) ist nun eine einfache Folgerung aus den übrigen Aussagen und dem aus Kapitel 3, §1f) bekannten *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes reelle oder komplexe Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt:

Wir wissen dann, daß die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der Dimension  $n$  des Vektorraums ist und daß alle Eigenwerte reell sind; da die algebraischen gleich den geometrischen Vielfachheiten sind, gibt es also  $n$  Eigenvektoren, die eine Basis von  $V$  bilden.

Für jeden einzelnen Eigenraum können wir die Eigenvektoren nach GRAM-SCHMIDT so wählen, daß sie eine Orthonormalbasis bilden; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal sind, ist die Vereinigungsmenge dieser Basen Orthonormalbasis von  $V$ . ■

### f) Hauptvektoren und und die Jordan-Zerlegung

Falls die lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  Eigenwerte hat, deren geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische ist, haben wir keine Chance auf eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  Diagonalgestalt hat: Die Elemente einer solchen Basis wären allesamt Eigenvektoren, und bei zu kleiner geometrischer Vielfachheit gibt es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren. Außerdem gibt es offensichtlich keine Chance auf eine Diagonalgestalt, wenn das charakteristische Polynom von  $\varphi$  nicht in Linearfaktoren zerfällt, denn dann ist schon die Summe der *algebraischen* Vielfachheiten der Eigenwerte kleiner als die Dimension von  $V$ .

Das zweite dieser Probleme konnten wir zumindest beim Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

dadurch lösen, daß wir zu einem größeren Körper übergegangen sind, nämlich von den reellen zu den komplexen Zahlen.

Tatsächlich läßt es sich *immer* dadurch lösen, daß man zu einem größeren Körper übergeht: Aus Kapitel 3, §1f) kennen wir den *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes Polynom mit komplexen (also insbesondere auch mit reellen) Koeffizienten über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt. Für andere Körper als die reellen oder komplexen Zahlen zeigt die Algebra, daß es zu jedem Polynom über einem Körper stets einen Erweiterungskörper gibt, der als Vektorraum über dem Ausgangskörper endliche Dimension hat, so daß das gegebene Polynom dort in Linearfaktoren zerfällt. Mit Methoden, die im allgemeinen nicht konstruktiv sind, folgt sogar, daß es stets einen (im allgemeinen unendlichdimensionalen) Erweiterungskörper gibt, über dem *jedes* Polynom in Linearfaktoren zerfällt, den sogenannte *algebraischen Abschluß* des Ausgangskörpers. Einzelheiten findet man in jedem Lehrbuch der Algebra.

Somit können wir das Problem, daß das charakteristische Polynom eventuell nicht genügend viele Nullstellen hat, im wesentlichen ignorieren.

Ernster ist das Problem mit Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische. Damit wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Die Lösung wird darin bestehen, daß wir solchen Eigenwerten Räume zuordnen, die größer sind als die Eigenräume, aber immer noch eine gut an die Abbildung angepaßte Basis haben. Insbesondere sollen sie, genau wie die Eigenräume, *invariant* sein unter der betrachteten Abbildung:

**Definition:**  $\varphi: V \rightarrow V$  sei eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum  $U \leq V$  heißt invariant unter  $\varphi$  oder kurz  $\varphi$ -invariant, wenn  $\varphi(U) \leq U$  ist.

Die  $\varphi$ -Invarianz der Eigenräume im Sinne dieser Definition ist klar, denn auf einem Eigenraum ist  $\varphi$  einfach die Multiplikation mit dem zugehörigen Eigenwert.

Für das folgende wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß  $V$  endliche Dimension habe. Dann ist erst recht jeder  $\varphi$ -invariante Unterraum  $U$  endlichdimensional, wir können also eine endliche Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$  von  $U$  finden und diese ergänzen zu einer Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  von  $V$ . Da  $\varphi(U) \leq U$  ist, liegen die Bilder der ersten  $r$  Basisvektoren wieder in  $U$ , d.h. die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

mit einer  $r \times r$ -Matrix  $A$ , der Abbildungsmatrix von  $\varphi|_U: U \rightarrow U$ , einer  $(n-r) \times (n-r)$ -Matrix  $B$  und einer  $(n-r) \times r$ -Matrix  $C$ . Die fette Null soll hier, wie auch in den noch folgenden Matrizen, stets eine Nullmatrix der jeweils korrekten Größe bezeichnen.

Noch besser wird die Situation, wenn  $U$  ein  $\varphi$ -invariantes Komplement hat, wenn es also einen weiteren  $\varphi$ -invarianten Untervektorraum  $W$  gibt, so daß  $V = U + W$  ist und  $U \cap W = \{\vec{0}\}$ . (Wir sagen dann,  $V = U \oplus W$  sei die *direkte Summe* von  $U$  und  $W$ .) In diesem Fall können wir für  $\vec{b}_{r+1}$

bis  $\vec{b}_n$  die Vektoren einer Basis von  $W$  nehmen, und da nun auch  $W$  auf sich selbst abgebildet wird, haben wir eine Abbildungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}.$$

Allgemein sagen wir für  $s$  Untervektorräume  $U_1, \dots, U_s$  von  $V$ , daß  $V$  die direkte Summe

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s = \bigoplus_{i=1}^s U_i$$

sei, wenn

$$V = U_1 + \dots + U_s = \sum_{i=1}^s U_i \quad \text{und} \quad U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{\vec{0}\}$$

ist. Falls hierbei die  $U_i$  allesamt  $\varphi$ -invariant sind, können wir ihre Basen aneinandersetzen und erhalten eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat, wobei die  $A_i$  die Abbildungsmatrizen der Einschränkungen  $\varphi|_{U_i}$  zu Abbildungen von  $U_i$  nach  $U_i$  sind.

Kandidaten für Untervektorräume  $U_i$  liefern die Haupträume:

- Definition:** a) Ein Vektor  $\vec{v} \in V$  heißt *Hauptvektor* von  $\varphi$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn es ein  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gibt, so daß  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell(\vec{v}) = \vec{0}$  ist. Falls  $(\varphi - \lambda \text{id})^{\ell-1} \vec{v} \neq \vec{0}$  ist, bezeichnen wir  $\ell$  als die *Stufe* des Hauptvektors.  
 b) Die Menge aller Hauptvektoren von  $\varphi$  zum Eigenwert  $\lambda$  heißt *Hauptraum* zu  $\lambda$  und wird mit  $H_\lambda$  bezeichnet.

Insbesondere sind die Hauptvektoren der Stufe eins genau die Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ : Der Nullvektor ist nämlich kein Hauptvektor erster Stufe, da er bereits von  $(\varphi - \lambda \text{id})^0 = \text{id}$  auf  $\vec{0}$  abgebildet wird.

Es ist klar, daß die Hauptvektoren einen Untervektorraum bilden, denn mit  $(\varphi - \lambda \text{id})$  sind auch dessen Schachtelungen

$$(\varphi - \lambda \text{id})^\ell = (\varphi - \lambda \text{id}) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda \text{id})$$

lineare Abbildungen, und die Hauptvektoren der Stufe höchstens  $\ell$  sind gerade die Elemente des Kerns dieser Abbildung. Da wir von einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  ausgehen, kann die Folge dieser Kerne nicht unbeschränkt wachsen, es gibt also ein maximales  $\ell$ , das als Stufe eines Hauptvektors auftreten kann. Mit diesem  $\ell$  ist der Hauptraum  $H_\lambda$  gerade der Kern von  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$ .

Der Nutzen der Haupträume ergibt sich aus folgendem

**Lemma:**  $H_\lambda$  ist ein  $\varphi$ -invarianter Unterraum von  $V$ . Bezeichnet  $\ell$  die größte Stufe eines Hauptvektors aus  $H_\lambda$ , so ist  $\text{Bild}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$  ein  $\varphi$ -invariantes Komplement.

*Beweis:* Beginnen wir mit der Invarianz von  $H_\lambda$  unter  $\varphi$ .

Ist  $\vec{v}$  ein Hauptvektor der Stufe  $j$ , so ist

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \text{id})^j(\vec{v}) &= (\varphi - \lambda \text{id})^{j-1}((\varphi - \lambda \text{id})(\vec{v})) \\ &= (\varphi - \lambda \text{id})^{j-1}(\varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v}) = \vec{0}, \end{aligned}$$

$\varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v}$  ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens  $j - 1$  und somit insbesondere ein Element von  $H_\lambda$ . Da mit  $\vec{v}$  auch  $\lambda \vec{v}$  in  $H_\lambda$  liegt, ist damit auch

$$\varphi(\vec{v}) = (\varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v}) + \lambda \vec{v} \in H_\lambda$$

ein Hauptvektor.

Für  $\vec{v} \in \text{Bild}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$  liegt zunächst auch  $\varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v}$  im Bild von  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$ , denn das Bild von  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$  enthält das Bild von  $(\varphi - \lambda \text{id})^{\ell-1}$ . Da mit  $\vec{v}$  auch  $\lambda \vec{v}$  im Bild liegt, folgt wie oben die Behauptung.

Als nächstes müssen wir zeigen, daß der Durchschnitt der beiden Summanden nur aus dem Nullvektor besteht. Dazu sei  $\vec{v}$  ein Vektor aus diesem Durchschnitt. Dann liegt  $\vec{v}$  sowohl im Kern als auch im Bild der linearen Abbildung  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$ , es gibt also einen Vektor  $\vec{w} \in V$ , so daß  $\vec{v} = (\varphi - \lambda \text{id})^\ell(\vec{w})$  ist, und  $(\varphi - \lambda \text{id})^\ell(\vec{v}) = (\varphi - \lambda \text{id})^{2\ell}(\vec{w}) = \vec{0}$ . Damit liegt  $\vec{w}$  aber im Hauptraum zu  $\lambda$ , d.h.  $\vec{v} = (\varphi - \lambda \text{id})^\ell(\vec{w}) = \vec{0}$ .

Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \text{Bild}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell = \dim V - \dim \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell,$$

also ist

$$\dim \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell + \dim \text{Bild}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell = \dim V,$$

die beiden Untervektorräume erzeugen somit ganz  $V$ . ■

Die Zerlegung von  $V$  nach diesem Lemma heißt FITTING-Zerlegung.

Der deutsche Mathematiker HANS FITTING (1906–1938) beschäftigte sich vor allem mit der Untersuchung von Operatoren (und Operatorenringen). Trotz seines frühen Todes konnte er damit wesentliche Beiträge zur Algebra leisten, vor allem auch zur Erforschung der Struktur von Gruppen.

Das Schöne an der FITTING-Zerlegung ist, daß sie rekursiv fortgesetzt werden kann: Da  $\text{Bild}(\varphi - \lambda \text{id})^\ell$  auch  $\varphi$ -invariant ist, können wir für die Einschränkung von  $\varphi$  auf diesen Unterraum einen Hauptraum zu einem anderen Eigenwert abspalten usw. Bevor wir uns das genauer überlegen, wollen wir uns aber zunächst eine gute Basis für den Hauptraum  $H_\lambda$  verschaffen.

**Lemma:** Der Hauptraum  $H_\lambda$  hat eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Alle Hauptdiagonaleinträge dieser Matrix sind gleich  $\lambda$ .

*Beweis:* Wir beginnen mit einer Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r_1}\}$  des Eigenraums zu  $\lambda$  und ergänzen diese zu einer Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r_2}\}$  des Raums aller Hauptvektoren der Stufe höchstens zwei und so weiter, bis eine Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$  des gesamten Hauptraums erreicht ist.



Der Vektor  $\vec{b}_i$  sei Hauptvektor der Stufe  $\ell_i$ ; dann ist

$$\begin{aligned}
 (\varphi - \lambda \text{id})^{\ell_i}(\vec{b}_i) &= (\varphi - \lambda \text{id})^{\ell_i-1}((\varphi - \lambda \text{id})(\vec{b}_i)) \\
 &= (\varphi - \lambda \text{id})^{\ell_i-1}(\varphi(\vec{b}_i) - \lambda \vec{b}_i) = \vec{0},
 \end{aligned}$$

$\varphi(\vec{b}_i) - \lambda \vec{b}_i$  ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens  $\ell_i - 1$ . Nach Konstruktion der Basis ist  $\varphi(\vec{b}_i) - \lambda \vec{b}_i$  daher eine Linearkombination von Basisvektoren  $\vec{b}_j$  mit Indizes echt kleiner  $i$ , d.h.

$$\varphi(\vec{b}_i) = \lambda \vec{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \vec{b}_j.$$

Bezüglich der Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$  hat die Abbildungsmatrix daher in der Tat die gewünschte Form. ■

Abspaltung immer weiterer Haupträume auch vom invarianten Komplement führt schließlich zum

**Satz:** Zu einer linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  eines endlichdimensionalen  $k$ -Vektorraums  $V$  gibt es genau dann eine Basis von  $V$ , bezüglich derer die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  eine Dreiecksmatrix ist, wenn das charakteristische Polynom von  $\varphi$  über  $k$  als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann. Alsdann kann die Basis so gewählt werden, daß die Abbildungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{A_1} & & & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \boxed{A_2} & & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \boxed{A_s}
 \end{pmatrix}$$

hat mit Dreiecksmatrizen  $A_i$ , die auf der Hauptdiagonalen den  $i$ -ten Eigenwert  $\lambda_i$  stehen haben.

*Beweis:* Falls es zu  $\varphi$  eine Basis gibt, bezüglich derer die Abbildungsmatrix  $A$  von  $\varphi$  eine Dreiecksmatrix ist, ist bezüglich dieser Basis auch

$A - \lambda E$  eine Dreiecksmatrix. Da die Determinante einer Dreiecksmatrix gerade das Produkt der Diagonaleinträge ist, bekommen wir als charakteristisches Polynom  $\det(A - \lambda E)$  ein Produkt von Linearfaktoren.

Falls umgekehrt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es auf jeden Fall Eigenwerte;  $\lambda_1$  sei einer davon, und  $H_{\lambda_1}$  sei der zugehörige Hauptraum. Dazu gibt es nach dem gerade bewiesenen Lemma eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von  $\varphi|_{H_{\lambda_1}}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, deren sämtliche Hauptdiagonaleinträge gleich  $\lambda_1$  sind.

Nach dem Lemma von der FITTING-Zerlegung gibt es zu  $H_{\lambda_1}$  ein  $\varphi$ -invariantes Komplement  $V_1$ , so daß  $V = H_{\lambda_1} \oplus V_1$  ist. Wir ergänzen die Basis von  $H_{\lambda_1}$  durch eine Basis von  $V_1$  zu einer Basis von  $V$ ; bezüglich dieser Basis hat  $\varphi$  dann eine Abbildungsmatrix der Form

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \boxed{B_1} \end{pmatrix}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Entwicklung des charakteristischen Polynoms  $\det(A - \lambda E)$  nach der ersten Spalte, gefolgt von der Entwicklung des Rests nach seiner ersten Spalte und so weiter, bis die ersten  $r_1 = \dim H_{\lambda_1}$  Spalten aufgebraucht sind, zeigt, daß

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \det(B_1 - \lambda E)$$

ist, das charakteristische Polynom von  $\varphi|_{V_1}$  ist also ein Teiler des charakteristischen Polynoms von  $\varphi$  und zerfällt somit auch in Linearfaktoren.

Insbesondere hat es (mindestens) eine Nullstelle  $\lambda_2$ ; wir können deren Hauptraum  $H_{\lambda_2}$  in  $V_1$  betrachten und damit  $V_1$  genau wie oben weiter zerlegen in  $H_{\lambda_2}$  und dessen invariantes Komplement  $V_2$ . Nimmt man

nun als Basisvektoren von  $V$  zunächst die Basisvektoren von  $H_{\lambda_1}$ , wie oben, dann entsprechende Basisvektoren für  $H_{\lambda_2}$  und schließlich noch solche für  $V_2$ , hat die Abbildungsmatrix  $A_2$  bezüglich dieser neuen Basis die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

mit einer neuen Dreiecksmatrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise lassen sich sukzessive immer weitere Haupträume abspalten, bis schließlich eine Basis erreicht ist, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{D_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von  $\varphi$ . Ist  $D_i$  eine  $r_i \times r_i$ -Matrix, so ist das charakteristische Polynom von  $\varphi$

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s},$$

die  $r_i$  sind also gerade die algebraischen Vielfachheiten der  $\lambda_i$ .  
 Für spätere Anwendungen wollen wir das gerade bewiesene Ergebnis noch etwas umformulieren:

**Satz:** Falls das charakteristische Polynom von  $\varphi: V \rightarrow V$  in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Basis von  $V$ , bezüglich derer die Abbildungsmatrix  $A$  von  $\varphi$  als  $A = D + N$  geschrieben werden kann, wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist und  $N$  eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Außerdem ist  $DN = ND$ .

*Beweis:* Wir nehmen natürlich die Basis aus dem gerade beendeten Beweis; die Diagonalmatrix  $D$  soll genau aus den Diagonalelementen der Abbildungsmatrix  $A$  bestehen, also die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten als Diagonalelemente enthalten, und  $N = A - D$ . Für jede einzelne Dreiecksmatrix  $D_i$  aus dem obigen Beweis kommutiert der Diagonalelement mit dem Rest, da der Diagonalelement das  $\lambda_i$ -fache der Einheitsmatrix ist. Damit ist auch  $DN = ND$ , denn bei beiden Multiplikationen treffen, abgesehen von den Nullen, immer nur Einträge aus einem  $D_i$  aufeinander.

Diese Zerlegung aus diesem Satz bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker CAMILLE JORDAN als JORDAN-Zerlegung.



MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) arbeitete bei der Herleitung dieser und weiterer Zerlegungen nicht mit komplexen Matrizen, sondern mit Matrizen über endlichen Körpern, motiviert durch Fragen aus der Gruppentheorie und Lösbarkeitsfragen für nichtlineare Gleichungen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Anwendung gruppentheoretischer Methoden auf die Geometrie sowie mit der Topologie, wo er z.B. bewies, daß jede doppelpunktfreie geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Außerdem entwickelte er neue Methoden zum Nachweis der Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Ziel unserer Betrachtungen in diesem Paragraphen war die Berechnung von Potenzen und Exponentialfunktionen einer Matrix. Mit der JORDAN-Zerlegung ist dies im wesentlichen erreicht: Da  $D$  und  $N$  miteinander

kommutieren, gilt für Potenzen der Summe  $D + N$  der „übliche“ binomische Lehrsatz, d.h.

$$(D + N)^m = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} D^{m-\ell} N^\ell,$$

und

$$e^{D+N} = e^D \cdot e^N.$$

Die Potenzen von  $D$  sind sehr einfach zu berechnen:  $D^j$  ist wieder eine Diagonalmatrix, ihre Diagonalelemente sind die  $j$ -ten Potenzen der Diagonalelemente von  $D$ ; genauso ist  $e^D$  einfach die Diagonalmatrix mit den Exponentialfunktionen der Einträge von  $D$  als Einträgen.

$N$  ist eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen, wir wissen also bereits, daß es einen Exponenten gibt, ab dem alle Potenzen gleich der Nullmatrix sind, so daß die Exponentialreihe zu einer endlichen Summe wird und auch in der binomischen Formel selbst für große  $m$  nur relativ wenige Summanden auftreten.

Mit der JORDAN-Zerlegung können wir diese Aussage nun noch etwas präzisieren: Die lineare Abbildung  $\psi$  zu  $N$  bildet den  $i$ -ten Basisvektor  $\vec{b}_i$  ab in den von Basisvektoren  $\vec{b}_j$  mit  $j \leq i - 1$  erzeugten Unterraum. Für diese Basisvektoren gilt eine analoge Aussage,  $\psi^{(2)}(\vec{b}_i)$  liegt daher im Unterraum, den die  $\vec{b}_j$  mit  $j \leq i - 2$  aufspannen. Induktiv folgt, daß  $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i)$  im von den  $\vec{b}_j$  mit  $j \leq i - \ell$  aufgespannten Untervektorraum liegt; falls  $i - \ell$  negativ wird, ist das natürlich der Nullraum.

Die Abbildungsmatrix  $N^\ell$  von  $\psi^{(\ell)}$  ist daher ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen; zusätzlich stehen auch noch in den  $\ell - 1$  schrägen Reihen oberhalb und parallel zur Hauptdiagonale lauter Nullen, und spätestens wenn  $\ell$  größer oder gleich der größten Stufe eines Hauptvektors wird, ist  $N^\ell$  gleich der Nullmatrix.

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die offensichtlich von der oben betrachteten Form ist; hier ist

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^3 = 0$$

ist, also ist beispielsweise

$$A^{10} = D^{10} + 10 D^9 N + 55 D^8 N^2 = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 390 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mehr als Potenzen interessiert uns die Exponentialfunktion einer Matrix; auch diese läßt sich über die JORDAN-Zerlegung berechnen: Da  $D$  und  $N$  kommutieren, ist  $e^A = e^{D+N} = e^D \cdot e^N$  mit

$$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

und

$$e^N = E + N + \frac{1}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$e^A = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 2e & 7e \\ 0 & 0 & 0 & e & 4e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Entsprechend läßt sich auch  $e^{At}$  berechnen:

$$e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 3t + 4t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und da auch  $Dt$  und  $Nt$  kommutieren, ist

$$e^{At} = e^{Dt} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 2te^t & 3te^t + 4t^2e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 4te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Zur Vorsicht sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es für diese Rechnungen sehr wesentlich war, daß  $D$  und  $N$  miteinander kommutieren; es reicht nicht, wenn wir die Matrix  $A$  nur auf *irgendeine* Dreiecksgestalt bringen und dann als Summe einer Diagonalmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen schreiben. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D + N$$

beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und in der Tat ist

$$D^2 + 2DN + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

verschieden von

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und genauso ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 3e^2 - 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e & 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse beim Quadrat liegt natürlich darin, daß wir im allgemeinen nur sagen können, daß

$$(D + N)^2 = D(D + N) + N(D + N) = D^2 + DN + ND + N^2$$

ist, aber wir können  $DN + ND$  nicht zusammenfassen zu  $2DN$ . Mit wachsendem Exponenten verschlimmert sich die Situation drastisch; schon

$$(D + N)^3 = D^3 + D^2N + DND + ND^2 + DN^2 + NDN + N^2D + N^3$$

hat acht Summanden; die  $m$ -te Potenz hat  $2^m$ , und von denen überleben viele auch dann, wenn  $N^r$  schon für relativ kleine  $r$  verschwindet. Für die Matrixexponentialfunktion, in die alle Potenzen eingehen, ist also ziemlich klar, daß es für nichtkommutierende Matrizen  $D$  und  $N$  keinen vernünftigen Zusammenhang zwischen  $e^{D+N}$  und  $e^D \cdot e^N$  geben kann.

### g) Ein Beispiel

Wir haben Eigenvektoren und Hauptvektoren in erster Linie eingeführt, um Differentialgleichungen zu lösen; daher soll das etwas ausführlichere Beispiel in diesem Abschnitt ebenfalls mit einer Differentialgleichung beginnen: Gesucht sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ \dot{z}(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t). \end{aligned}$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

und das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

Wir haben also den Eigenwert zwei mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit eins und den Eigenwert drei mit algebraischer Vielfachheit zwei. In der Matrix

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist die mittlere Spalte gleich der Summe der beiden äußeren,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt also den Eigenraum. In

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

stimmen die zweite und die dritte Spalte miteinander überein,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist also ein Eigenvektor und erzeugt auch den Eigenraum, denn da die erste Spalte kein Vielfaches der zweiten ist, hat die Matrix den Rang zwei. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts drei ist also nur eins: Um zu einer Dreiecksmatrix zu kommen, müssen wir einen Hauptvektor zweiter Stufe berechnen. Aus

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sieht man, daß sich

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als von  $\vec{v}_2$  linear unabhängiger Kandidat anbietet. Da

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_3 - \vec{v}_2$$

ist, hat  $A$  bezüglich der Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  die Form

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

der erste „Kasten“ ist also einfach eine  $1 \times 1$ -Matrix und der zweite ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da das Quadrat des zweiten Summanden verschwindet, ist

$$e \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t = e \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Um daraus  $e^{At}$  zu berechnen, müssen wir die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  durch die Hauptvektoren ausdrücken; man überzeugt sich leicht, daß

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{e}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$$

ist. Bezüglich der Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  ist also

$$e^{At} \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

was bezüglich der Standardbasis der Vektor

$$e^{2t} \vec{v}_1 + e^{3t} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Also ist, bezüglich der Standardbasis ausgedrückt,

$$e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Genauso überlegt man sich, daß

$$e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \vec{v}_1 + (e^{3t} + te^{3t}) \vec{v}_2 - e^{3t} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} \end{pmatrix}$$

und

$$e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}$$

ist. Da in den Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist somit

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} & e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung, die den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad z(0) = z_0$$

genügt, ist also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} & e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} & e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} - (y_0 + z_0)e^{3t} \\ (x_0 + (t+2)y_0 + (t+1)z_0)e^{3t} - (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} \\ (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} - (x_0 + (t+1)y_0 + tz_0)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

**h) Ergänzung: Die Jordan-Normalform**

Die im vorigen Abschnitt konstruierte Normalform für Abbildungsmatrizen wird für alle Zwecke dieser Vorlesung ausreichen. Trotzdem ist sie nicht ganz befriedigend, da die Dreiecksmatrizen immer noch sehr willkürlich und damit komplizierter als notwendig sind. Für Interessenten sei in diesem Abschnitt gezeigt, wie sich die bislang erreichte

Dreiecksgestalt noch weiter vereinfachen läßt. Für das folgende werden wir die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht benötigen; er kann also auch gefahrlos überlesen werden.

Die Potenzen einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen verschwinden, wie wir gesehen haben, ab einem meist überschaubar kleinen Exponenten, aber die Potenzen bis dahin muß man doch mühsam von Hand ausrechnen. Eine Ausnahme, bei der alles klar ist, bilden Matrizen der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bei denen direkt oberhalb der Hauptdiagonale lauter Einsen stehen, während alle anderen Einträge verschwinden, d.h.

$$N = (n_{ij}) \quad \text{mit} \quad n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bei der sukzessiven Potenzierung von  $N$  verschiebt sich einfach die Reihe von Einsen jeweils um eins weiter nach außen, d.h.

$$N^\ell = (n_{ij}^{(\ell)}) \quad \text{mit} \quad n_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

denn die zu  $N$  gehörige lineare Abbildung  $\psi$  bildet einfach den  $i$ -ten Basisvektor auf den  $(i-1)$ -ten ab oder auf den Nullvektor, falls es keinen  $(i-1)$ -ten Basisvektor mehr gibt, und entsprechend ist  $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i) = \vec{b}_{i-\ell}$  beziehungsweise  $\vec{0}$ .

In diesem speziellen Fall sind die Potenzen von  $N$  also ohne jeden Aufwand zu berechnen, und tatsächlich genügen solche Matrizen  $N$  schon vollständig für eine Normalform der Abbildungsmatrix, die sogenannte JORDAN-Normalform:

**Satz:** Falls das charakteristische Polynom von  $\varphi: V \rightarrow V$  als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, gibt es eine Basis von  $V$ ,