Lemma: Ist die Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von f als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

Beweis: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der Betrag des Integranden ist $|f(t)|$; da f absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand $f(t)e^{-i\omega t}$ ist als Funktion von ω für jeden Wert von t stetig und als Funktion von t immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §6*a)* zunächst, daß für Intervalle $[a, b]$, in denen f stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

eine stetige Funktion von ω ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion $\widehat{f}(\omega)$ stetig und beschränkt. ∎

Damit folgt insbesondere der z.B. für die Identifikation von Lösungen von Differentialgleichungen wichtige

Satz: $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien stetige Funktionen.
a) Falls die FOURIER-Transformierten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ übereinstimmen, ist $f = g$.
b) Falls es ein $r > 0$ gibt, so daß $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s = r$, ist $f(t) = g(t)$ für alle $t > 0$.

Beweis: a) folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Lemma, und *b)* folgt daraus, daß man dieses Lemma auf die Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ g(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

anwendet, die zumindest für $t > 0$ stetig sind, und deren FOURIER-Transformationen gerade die LAPLACE-Transformationen von f und g für $\mathfrak{Re}\, s = r$ sind. ∎

f) Ableitungen von Distributionen

Wie wir in §6*b)* gesehen haben, ist für alle mindestens r-fach stetig differenzierbare Funktionen f, sofern alle vorkommenden FOURIER-Transformierten existieren,

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,;$$

eine ähnliche, leicht komplexere Formel gilt auch für die LAPLACE-Transformation. Dies hatten wir im weiteren Verlauf von §6 zur Lösung erster Differentialgleichungen verwendet.

Inzwischen können wir die Voraussetzungen etwas präziser formulieren; insbesondere ist klar, daß diese Formeln für alle stark abfallenden Funktionen und alle $r \in \mathbb{N}$ gelten. Auch wissen wir, daß sie für quadratintegrierbare Funktionen gelten, *falls* auch alle Ableitungen bis zur jeweils betrachteten quadratintegrierbar sind.

In diesem Paragraphen wollen wir uns überlegen, wie man diesen Formeln auch für *beliebige* quadratintegrierbare Funktionen mit Hilfe von Distributionen zumindest bis auf Nullfunktionen einen Sinn geben kann.

Dazu überlegen wir uns zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACschen δ-Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\dot{\delta}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion f die Distribution $T_{\dot f}$ ausrechnen in der Hoffnung, das dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch die Ableitung $\dot f$ höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_{\dot f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Nach der Regel für partielle Integration ist daher

$$T_{\dot f}(\varphi) = f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt\,.$$

Da f höchstens polynomiales Wachstum hat, ist $|f(t)|$ kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form $c\,|t|^k$ für eine reelle Zahl $c > 0$ und eine natürliche Zahl k. Da außerdem φ eine stark abfallende Funktion ist, bleibt $\left|t^{k+1}\varphi(t)\right|$ beschränkt für alle t, d.h.

$$|\varphi(t)| \le \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl $M > 0$. Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \le \left|ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}}\right| \le \frac{cM}{|t|}\,.$$

Somit geht das Produkt $\varphi(t)f(t)$ gegen Null für $t \to \pm\infty$ und

$$T_{\dot f}(\varphi) = -\int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = -T_f(\dot\varphi)\,.$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

Definition: Die Ableitung einer Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\dot T\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto -T_f(\dot\varphi) \end{cases},$$

die n-te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto (-1)^n T_f\left(\varphi^{(n)}\right) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß $\dot T$ und allgemeiner auch $T^{(n)}$ Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit t-Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der δ-„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\,\varphi(t)\,dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)\,.$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neuen Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

hat als Ableitung die Distribution $\dot T_\vartheta$ mit

$$\dot T_\vartheta(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \dot\varphi(t)\,dt = -\varphi(t)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0)\,,$$

da $\varphi(t)$ bei einer stark abfallenden Funktion für $t \to \infty$ gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution Δ_0. Also ist

$$\dot{T}_\vartheta = \Delta_0 \,,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot{\vartheta}(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle $t = t_0$ ist jeweils Sprunghöhe mal $\delta(t - t_0)$.

Auch mit der Ableitung der Betragsfunktion haben wir auf Distributionenniveau keine Probleme: Für $f(t) = |t|$ zeigt partielle Integration, daß

$$\begin{aligned}
\dot{T}_f(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t \cdot \varphi(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} t \cdot \varphi(t)\,dt \\
&= t\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt - t\varphi(t)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,dt = T_g(\varphi)
\end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

An der Stelle $t = 0$ können wir einen beliebigen Funktionswert wählen, denn T_g hängt nicht von diesem Wert ab. Wir bekommen also für $t \neq 0$, wo $f(t) = |t|$ differenzierbar ist, die erwarteten Ergebnisse, und für $t = 0$ keine Aussage. Nichtsdestoweniger ist die *Distribution* $\dot{T}_f$ wohldefiniert. Auf dem Niveau der Distributionen sind Ableitungen also ziemlich problemlos – auch für nichtdifferenzierbare Funktionen.

Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir

bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r \,.$$

Wir erwarten

Lemma: Für jede Distribution $T \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ und jede natürliche Zahl r ist

$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \widehat{T} = (-i)^r \widehat{T^{(r)}} \,.$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §6*b)*

$$\begin{aligned}
\widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T\big(\widehat{\varphi^{(r)}}\big) = (-1)^r T\big(i^r \Pi_r \widehat{\varphi}\big) \\
&= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi) \,,
\end{aligned}$$

denn aus der Formel $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$ folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega) \,.$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned}
\Pi_r \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r \varphi) = T\big(\widehat{\Pi_r \varphi}\big) = T\big(i^r \widehat{\varphi}^{(r)}\big) \\
&= i^r T\big(\widehat{\varphi}^{(r)}\big) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T^{(r)}} \,.
\end{aligned}$$

■

Rückübersetzt für Funktionen heißt das, daß die Formeln

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \,;$$

zumindest bis auf Nullfunktionen auch dann für quadratintegrierbare Funktionen gelten, wenn diese nur im Distributionensinn differenzierbar sind. Die entsprechende Formel für die LAPLACE-Transformation, die zusätzlich die Funktions- und Ableitungswerte an der Stelle Null enthält, ist natürlich (auch modulo Nullfunktionen) nur dann sinnvoll, wenn diese Werte wohldefiniert sind.

g) Faltungen

Bei der Untersuchung von FOURIER-Reihen in §4*a)* erwies sich die (periodische) Faltung zweier Funktionen als wichtiges Instrument zum Nachweis der Konvergenz; außerdem war sie oft nützlich, um ohne großen Aufwand neue FOURIER-Reihen aus bekannten herzuleiten.

Hier im nichtperiodischen Fall ist sie einfacher und anschaulicher zu verstehen als im periodischen Fall: $f(\star g)(t)$ ist einfach das gewichtete Mittel der Funktionswerte von f in der Umgebung von t, wobei g die Gewichtsfunktionen ist. Am einfachsten ist es, wenn man sich g als eine Funktion vorstellt, die im Punkt Null ein Maximum hat und dann nach beiden Seiten monoton abfällt; dann kann man sich $f \star g$ als eine „verschmierte" (oder auch geglättete) Version von f vorstellen. Indem man für $g(t)$ GAUSSsche Glockenkurven nimmt, kann man beispielsweise unscharfe (oder weichgezeichnete) Photographien simulieren – je größer der Parameter σ, desto unschärfer ist das Resultat.

Für die formale Definition lassen wir allerdings beliebige Funktionen f und g zu; später werden wir sogar Faltungen von Funktionen mit Distributionen betrachten.

Definition: Für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$f \star g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds \end{cases},$$

falls dieses Integral existiert, *Faltung* von f mit g.

Lemma: Für $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existiert die Faltung $f \star g$.

Beweis: Mit f liegt für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $s \mapsto f(t-s)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; die Abschätzungen aus §8*a)* zeigen daher die Existenz des Integrals $f \star g(t)$. ∎

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

Lemma: Falls die FOURIER-Transformationen von f, g und von $h(t) = (f \star g)(t)$ als Funktionen existieren, ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds \right) e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)e^{-i\omega t}\,dt \right) ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(s)e^{-i\omega(u+s)}\,du \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) g(s)e^{-i\omega s}\,ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s}\,ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} \star \widehat{g})(\omega)$.

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) \cdot \widehat{\widehat{g}}(t)\,.$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen

Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi\cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f\star g}}(t) = 4\pi^2\cdot f(-t)g(-t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}}(t) = 2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t) = 4\pi^2\cdot\widehat{fg}(-t) \quad \text{oder} \quad (fg)(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)\,.$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f\star g = g\star f \quad \text{und} \quad f\star(g\star h) = (f\star g)\star h\,,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f\star g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f}\cdot\widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f\star g)\star h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\frac{1}{\widehat{g}(\omega)} = \widehat{f}(\omega)\,,$$

$(f\star g)\star h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$ ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend“. Das muß aber nicht immer ein Problem sein, denn für praktische Zwecke wird man sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden können, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet

werden muß. Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten nach dieser Einschränkung des Integrationsintervalls natürlich nicht mehr, zumindest nicht mehr exakt, aber ausgehend von den obigen Formeln kann man mit einigem Geschick doch gelegentlich Formeln finden, die zumindest näherungsweise ein brauchbares Ergebnis liefern. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch vor der Reperatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokusierten Teleskop.

Besonders einfach sind Faltungen mit δ-Funktionen zu berechnen: Für $\eta(t) = \delta(t-t_0)$ zeigt die Substitutionsregel mit $u = t - t_0 - s$, daß

$$\eta\star f = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0-s)g(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)g(t-t_0-u)\,du = g(t-t_0)$$

ist, Faltung mit $\delta(t-t_0)$ verschiebt also einfach das Argument um t_0. Insbesondere ist $\delta\star f = f$.

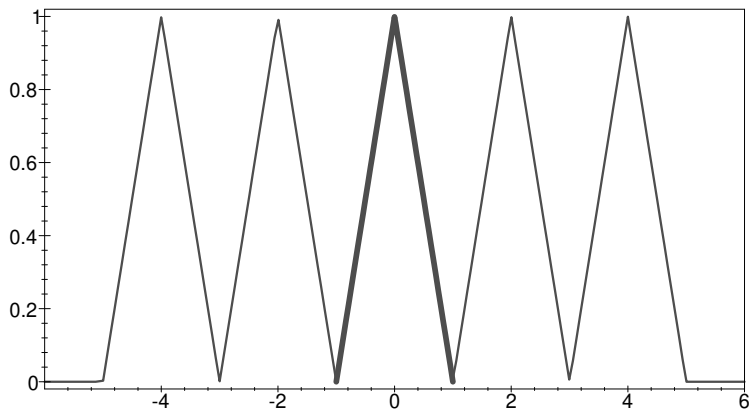

Abb. 25: Faltung eines Dreiecksimpuls mit einer Summe von δ-Distributionen

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von

δ-Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschieben; Abbildung 25 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreiecksimpulses auf $[-1,\ 1]$ und die Distribution

$$\delta(t-4)+\delta(t-2)+\delta(t)+\delta(t+2)+\delta(t+4)\,.$$

h) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t)=0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß f die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t)=\sin(1000\pi t)$ und $f(t)=-3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t)=\cos(500\pi t)\quad\text{und}\quad g(t)=\cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1, 0, -1, 0$ an; siehe Abbildung 26. Da der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem gegebenen Signal auch höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Abtastpunkten mit ihm übereinstimmen; eine eindeutige Rekonstruktion ist höchstens dann möglich, wenn man eine Grenze festlegt, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, daß dann in der Tat eine Rekonstruktion möglich ist, und er sagt auch, wo die Grenze liegen soll, oberhalb derer man die Frequenzen abscheiden muß: Die Abtastfrequenz muß mehr als doppelt so hoch sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

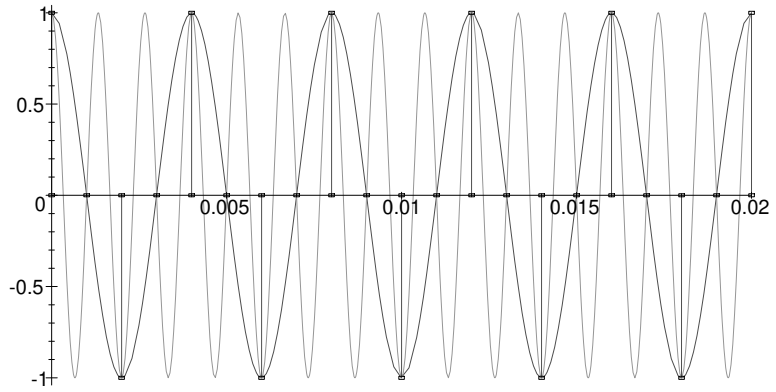

Abb. 26: Abtastung zweier Schwingungen

Die genaue Formulierung des Satzes ist etwas technischer; insbesondere müssen wir berücksichtigen, daß die Kreisfrequenz ω, mit der wir immer arbeiten, etwas anderes ist, als die Frequenz: Eine reine Schwingung mit einer Frequenz von 1000 Hz ist nicht gegeben durch eine Funktion wie $\sin 1000t$, sondern – bei in Sekunden gemessener Zeit – durch $\sin 2000\pi t$. Entsprechend kommt auch jetzt bei der Formulierung des Abtastsatzes von NYQUIST ein Faktor 2π ins Spiel:

Satz: $f\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ habe die Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwinde. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k\in\mathbb{Z}$.

Beweis: $(\omega_1,\ \omega_2)$ sei ein Intervall der Länge Ω derart, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist bis auf eine Nullfunktion

$$f(t)=\check{\widehat{f}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Indem wir f durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß diese Gleichung wirklich gilt. Also

ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,. \qquad (*)$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\widehat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode Ω in ω auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt ist. Für diese Funktion ist natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\widehat{f}$ und g überein.

g als periodische Funktion in ω mit Periode Ω hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\,;$$

der k-te FOURIER-Koeffizient ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\Omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{-ik\lambda\omega}\,d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{-2\pi i\omega k/\Omega}\,d\omega \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right)\,, \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $(*)$ gilt.

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von g bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte ω_2) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \check{\widehat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ■

HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte)*. Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\begin{aligned} \widehat{f}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}\,dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\widehat{f}(\omega)} \end{aligned}$$

genau dann, wenn auch $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet. Daher wird in diesem Fall alles einfacher, wenn man das Intervall, außerhalb dessen $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet, symmetrisch zum Nullpunkt wählen kann, also von der Form

$$(-\omega_0, \omega_0)\,.$$

Die zur Kreisfrequenz ω_0 gehörende Frequenz $2\pi\omega_0$ wird in diesem Zusammenhang oft als *Bandbreite* bezeichnet. Hier ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion f brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein Signal der Bandbreite ν_0 muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\nu_0$ abgetastet werden, damit man es eindeutig rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD

wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$, die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

§9: Ausblick: Mehrdimensionale Fourier-Theorie

a) Faltungen und Fourier-Integrale

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein n-dimensionales definieren: Für zwei Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,,$$

definieren wie die Faltung als

$$f \star g = \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) g(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

– sofern dieses Integral existiert.

Auch die anschauliche Interpretation ist dieselbe wie im eindimensionalen Fall: Wenn wir f als eine Gewichtsfunktion auffassen, ist $f \star g$ ein gewichtetes Mittel über Werte von g; für

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_i^2}$$

etwa, die n-dimensionale GAUSS-Funktion, entspricht das im Fall $n = 2$ einem je nach Größe von σ mehr oder weniger defokusierten Bild.

Durch mehrdimensionale Faltungen mit δ-Distributionen lassen sich Verschiebungungen realisieren: Beispielsweise wäre, wenn der Satz von FUBBINI in einer solchen Situation anwendbar wäre,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \delta(x-a)\delta(y-b) f(x,y)\, dx\, dy = f(x-a, y-b)\,,$$

und genau so *definieren* wir die Interpretation der *a priori* sinnlosen linken Seite.

(Man beachte, daß Ausdrücke wir $\delta(x-a)\delta(x-b)$ oder $\delta(x)^2$ weiterhin sinnlos bleiben, egal ob sie unter einem oder mehreren Integralzeichen stehen.)

Ist also $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (z.B. durch Grauwerte) ein Bild definiert und die außerhalb des Bereichs $0 \le x, y \le 1$ verschwindet, so ist mit der Distribution

$$\eta(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \delta(x-k)\delta(y-\ell)$$

die Faltung $\eta \star f$ ein Bilderbogen aus NM Exemplaren dieses Bildes. Abbildung 27 zeigt dies für den Graph einer zweidimensionalen Normalverteilung.

Auch die FOURIER-Transformation läßt sich in völliger Analogie zum eindimensionale Fall auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i\sum_{k=1}^n \omega_i x_i}\, dx_1 \cdots dx_n \end{cases}.$$

Da es nur eine Zeit gibt, läßt sich dies nicht als Zerlegung eines zeitlichen Signals in seine Frequenzen interpretieren; die x_i sollte man sich hier als *räumliche* Koordinaten vorstellen. Beispiele dazu folgen im nächsten Abschnitt, wo wir eine Anwendung solcher räumlicher FOURIER-Transformationen betrachten.

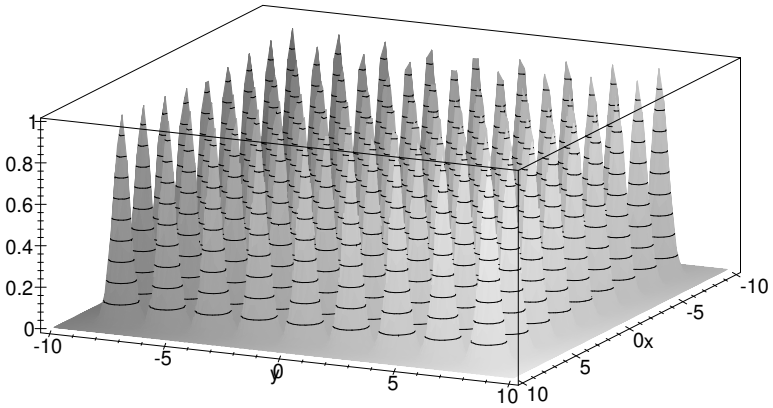

Abb. 27: Eine zweidimensionale Faltung

Wenigsten kurz sei noch angedeutet, wie man auch die mehrdimensionale FOURIER-Theorie über stark abfallende Funktionen mehrerer Veränderlicher exakt begründen kann:

Eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn *alle* Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} \, \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

auf ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkt sind. Der Vektorraum aller dieser Funktionen ist der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für Funktionen auf diesem Raum ist wieder alles relativ problemlos; zur Verallgemeinerungen auf interessantere Funktionen geht man wieder den Umweg über Distributionen

$$T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,,$$

die in der naheliegenden Weise als Verallgemeinerungen eindimensionaler Distribibutionen definiert werden. Beispielsweise kann man dem gerade *ad hoc* betrachteten Produkt $\delta(x-a)\delta(y-b)$ über die Distribution

$$\Delta_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a,b) \end{cases}$$

einen präzisen Sinn geben – solange es in einem sinnvollen Kontext unter zwei Integralzeichen steht.

b) Fraunhofer-Beugung

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; für ein Beispiel im Rahmen einer Vorlesung über Höhere Mathematik müssen wir uns auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.

JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasermeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasschleifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwikkelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt; er berichtete unter anderem in öffentlichen Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit. Im gleichen Jahr wurde er vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder $\vec{E}(x,y,z;t)$ und $\vec{B}(x,y,z;t)$, die den MAXWELLschen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in

der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.

Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle,* über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die x-Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung φ dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behanden können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$ erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode T einer Schwingung eine Wellenlänge λ; das Analogon zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir als

$$\textit{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion

$$g(x) = A_0 e^{ikx} .$$

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl k ersetzen durch einen Vektor $\vec{k}$ der Länge k, den *Wellenzahlvektor,* und betrachten die Funktion

$$g(\boldsymbol{x}) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} .$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x,t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k} t - x\right)} ,$$

$\psi(x,t)$ hängt also nur ab von $x - \frac{\omega}{k} t$. Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um Δt hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um $v \cdot \Delta t$.

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist $\vec{k}_0$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$, so ist

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k} t - \vec{k}_0\cdot\vec{x}\right)} ;$$

dabei ist $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$ die $\vec{x}$-Komponente in Richtung von $\vec{k}$. Damit ist $\vec{k}_0$ die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag v des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude A_0 in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt

mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Beugung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbilder ist das HUYGENSsche Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion α des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Jura arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französisch-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer Kritiker sowohl von NEWTONs Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Beugung betrachten wir auch die gebeugten Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \cdot e^{i\omega t},$$

ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können; es reicht also, den Faktor $A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}}$ zu betrachten.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel θ oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln θ und φ, unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt“ ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung 20 zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung 28 dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung x einen Laufwegunterschied von $x \sin\theta$; dies entspricht einem Phasenfaktor von $e^{-ik\sin\theta}$. Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter

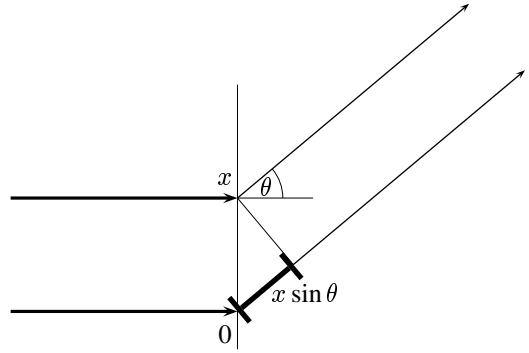

Abb. 28: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

dem Winkel θ abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-ik\sin\theta}\, dx\,;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von $\alpha(x)$, ausgewertet im Punkt $u = k\sin\theta$.

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen θ und ϕ berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion α hängt von zwei Variablen x, y ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die x- als auch die y-Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegeben Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) e^{-i(k_1\sin\theta + k_2\sin\phi)}\, dx\, dy\,,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von α, ausgewertet im Punkt $(u,\ v) = (k_1\sin\theta,\ k_2\sin\varphi)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen u *bzw.* den Variablen u und v aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion α somit einfach die FOURIER-Transformierte von α. Allerdings muß man dabei beachten, daß u und v, obwohl man

sie als Strecken interpretieren kann, *nicht* proportional zu den Strecken sind, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu $\tan\theta$ und $\tan\varphi$.

Dies wollen wir anwenden, um als erstes das Beugungsbild eines Spalts zu berechnen. Dieser habe die Breite a; seine Durchlässigkeitsfunktion kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-uix}\, dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{iau}{2}} - e^{\frac{iau}{2}}}{-iu} = \frac{2\sin\frac{au}{2}}{u} = a\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a\,\mathrm{sinc}\,\frac{au}{2}\,. \end{aligned}$$

Dies erklärt, warum die Funktion $\mathrm{sinc}\, x$ auch als *Spaltfunktion* bezeichnet wird.

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben: $\widehat{\alpha}(u)$ ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Betragsquadrat davon, bei einer reellen Funktion wie hier also einfach das Quadrat

$$\widehat{\alpha}(u)^2 = 4\frac{\sin^2\frac{au}{}}{u^2} = a^2\,\mathrm{sinc}^2\,\frac{au}{2}\,.$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir Beugung an einem regelmäßigen Strichgitter. Der Abstand zweier Striche sei d und es gebe insgesamt $2N+1$ Striche. Wenn wir in erster Näherung die Breite der Striche vernachlässigen, können wir die Durchlässigkeitsfunktion α als Summe von δ-Distributionen schreiben:

$$\alpha(t) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(x - kd)\,.$$

Das Beugungsbild ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-iux}\,dx = \sum_{k=-N}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-kd)e^{-iux}\,dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} e^{-iudk} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iukd} = e^{-iuNd}\sum_{k=0}^{2N} e^{iukd} \\ &= e^{-iuNd}\frac{1-e^{iu(2N+1)d}}{1-e^{iud}} = \frac{e^{-iuNd}-e^{iu(N+1)d}}{1-e^{iud}} \\ &= \frac{e^{iu(N+\frac{1}{2})d}-e^{-iu(N+\frac{1}{2})d}}{e^{iu\frac{d}{2}}-e^{-iu\frac{d}{2}}} = \frac{\sin u\left(N+\frac{1}{2}\right)d}{\sin\frac{ud}{2}}\,.\end{aligned}$$

Abbildung 29 zeigt diese Funktion; man sieht ihr das charakteristische Linienmuster an, das man bei der Beugung am Gitter beobachtet.

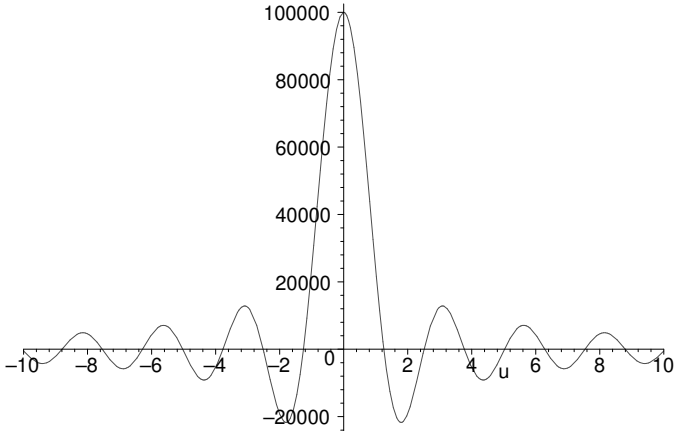

Abb. 29: Beugung am Gitter

Trotzdem wird vielleicht einigen Lesern unwohl sein beim Gedanken an eine Summe von δ-Distributionen als Durchlässigkeitsfunktion. Deshalb wollen wir zur Sicherheit nachrechnen, was sich ändert, wenn wir stattdessen die Striche als Spalte der Breite a annehmen.

Für einen einzelnen solchen Spalt haben wir dann die oben betrachtete Durchlässigkeitsfunktion

$$\alpha_a\colon \begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases}$$

eines Spalts der Breite a, und die Durchlässigkeitsfunktion des gesamten Strichgitters ist die Faltung $\alpha\star\alpha_a$ dieser Funktion mit der gerade betrachteten Funktion ψ. Das Beugungsbild ist somit gegeben durch das Produkt des gerade berechneten Beugungsbilds mit dem Beugungsbild eines Spalts, also durch

$$\frac{\sin u\left(N+\frac{1}{2}\right)d}{\sin\frac{ud}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{u}{2}}\,.$$

Da der Abstand zwischen zwei Spaltmitten gleich d ist, muß die Spaltbreite a echt kleiner als d sein, und die Anzahl N der Striche im Gitter liegt typischerweise bei mindestens einigen Zehntausend. Somit hat der Sinus im zweiten Term eine Kreisfrequenz, die um einen mindestens fünfstelligen Faktor gröser ist als die im ersten; der zweite Term zeigt also erst dann eine nennenswerte Variation, wenn wir im ersten Faktor mehrere Tausend Linien betrachten. In dem Bereich, den wir realistischerweise beobachten können, ist der zweite Term somit für alle praktischen Zwecke konstant. Der Betrag dieser Konstanten ist irrelevant, denn da wir bei der FRAUNHOFER-Beugung das Beugungsbild in „sehr großer“ Entfernung vom Gitter betrachten, können wir sinnvollerweise ohnehin nur von relativen, nicht aber von absoluten Helligkeiten reden.

Als letztes Beispiel zur eindimensionalen Beugung möchte ich eines betrachten, bei dem das Licht nicht als konstante Wellenfront einfällt: Je nach Wahl der Randbedingungen im optischen Resonator entsteht nicht immer ein Strahl, der näherungsweise als ebene Welle betrachtet werden kann (die sogenannte TEM_{00}-Mode); bringt man Hindernisse in den Strahlengang, können auch höhere TEM-Moden angeregt werden (TEM = *transversal elektromagnetisch*). Bei einem dünnen Hindernis wie etwa einem Haar genau in der Mitte des Strahls beispielsweise entsteht die TEM_{01}-Mode, die aus einem linken und einem rechten Halbstrahl besteht, deren Phasen sich um 180° unterscheiden, und die man

ansonsten wieder näherungsweise als ebene Wellen betrachten kann. Trifft ein solcher Strahl auf einen Spalt, dessen Mitte mit der Grenze zwischen den beiden Halbstrahlen zusammenfällt, müssen wir also die Funktion, die etwa links der Null gleich +1 und rechts der Null gleich -1 ist mit der Durchlässigkeitsfunktion des Spalts multiplizieren; für einen Spalt der Breite a erhalten wir als Beugungsbild

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{0} e^{-iux}\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} -e^{-iux}\,dx = \frac{1 - e^{iua/2} - e^{-iua/2} + 1}{-iu}$$

$$= \frac{2i}{u}\left(1 - \cos\frac{ua}{2}\right) .$$

Alternativ läßt sich dies auch über die Beziehung

$$e^{iua/2} + e^{-iua/2} - 2 = (e^{iua/4} - e^{-iua/4})^2 = -4\sin^2\frac{ua}{4}$$

als

$$\frac{4i}{u}\sin^2\frac{ua}{4}$$

schreiben. Daß hier imaginäre Größen auftreten, braucht uns natürlich nicht zu stören: Die beobachteten Intensitäten sind bekanntlich die Betragsquadrate der hier berechneten Funktionen, also reell und positiv.

Zum Abschluß möchte ich noch zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon in so einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} ,$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\widehat{\alpha}(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y)e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy = \iint_{\substack{-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\\ -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}}} e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iux}e^{-ivy}\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ivy}\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,dx = 4\cdot\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v} ,$$

da wir das Rechteck als Normalbereich betrachten können und somit das zweidimensionale Integral über zwei eindimensionale Integrationen berechnen können.

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines Spalts.