Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

§8: Die Fourier-Transformation auf $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, verhält sich die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum genau so, wie wir es erwarten; leider sind aber die Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum für die meisten Anwendungen zu schön, um nützlich zu sein. Wir brauchen daher einen größeren Funktionenraum, auf dem wir die FOURIER-Transformation immer noch gut verstehen können. Darum geht es in diesem Paragraphen.

a) Quadratintegrierbare Funktionen

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach Aussage *c)* des ersten Lemmas aus §7*a)* ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Er ist allerdings deutlich kleiner als $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn beispielsweise ist auch jeder Rechteckimpuls quadratintegrierbar und allgemeiner jede stückweise stetige Funktion, die außerhalb eines endlichen Intervalls $[a, b]$ identisch verschwindet. Auch Funktionen wie $e^{-|t|}$ liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = 1 .$$

Funktionen wie $\sin \omega t$ sind natürlich nicht quadratintegrierbar; aber bei periodischen Funktionen betrachtet man ohnehin sinnvollerweise nur Integrale über eine Periode, nicht solche über die gesamte reelle Achse. (Das ist der aus der Elektrotechnik bekannte Unterschied zwischen Energie- und Leistungssignalen; die Energiesignale sind genau die quadratintegrierbaren.)

Auf dem SCHWARTZ-Raum haben wir ein HERMITEsches Produkt, bezüglich dessen wir das Integral über $|f|^2$ kurz als $\sqrt{(f, f)}$ schreiben können; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß zumindest die Definition

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

auch für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sinnvoll ist:

Da $\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \ge 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist nach der binomischen Formel auch

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \le \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big) ,$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)|\, dt \le \frac{1}{2}\int_N^M f(t)\overline{g(t)}\, dt + \frac{1}{2}\int_N^M g(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für alle $N \le M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \to -\infty$ und $M \to \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu (f, g) sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{(f, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2-Norm von f, denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \not\equiv 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ heißt *Nullfunktion*, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die wir in **[HM1]**, *Kap. 1,* §6*c)* aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITEsch sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$

$$|(f,\ g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0\,,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt $(f,\ g)$, und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus $(f,\ f)$.

b) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Jede quadratintegrierbare Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ definiert eine lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt \end{cases}$$

Man beachte daß hier, trotz der komplexwertigen Funktionen, keine komplexe Konjugation steht! Vergleich mit dem Produkt

$$(f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

zeigt, daß

$$\widetilde{T}_f(g) = (f,\ \overline{g}) = (g,\ \overline{f})$$

ist. Insbesondere ist $\widetilde{T}_f$ genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Da der SCHWARTZ-Raum ein Untervektorraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist, können wir $\widetilde{T}_f$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ einschränken und die lineare Abbildung

$$T_f\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \end{cases}$$

betrachten. Mit Hilfe dieser Abbildung wollen wir im folgenden Eigenschaften von f und seiner FOURIER-Transformierten (über deren Existenz wir noch nichts wissen) auf Eigenschaften stark abfallender Funktionen zurückführen.

Die Abbildung T_f existiert nicht nur für quadratintegrierbare Funktionen f, sondern allgemeiner für *jede* Funktion, deren Betrag höchstens polynomial ansteigt:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \le c \cdot |t|^k$$

ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell \varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k + 2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die

$$\left|t^k(1+t^2)\varphi(t)\right| = \left|t^k\varphi(t) + t^{k+2}\varphi(t)\right| \le M$$

ist. Damit folgt

$$\left|(1+t^2)f(t)\varphi(t)\right| \le \left|(1+t^2)ct^k\varphi(t)\right| \le cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \le \frac{cM}{1+t^2}\,.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cM}{1+t^2}\,dt = cM \arctan t\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = cM\pi$$

konvergiert, ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ über die linke Seite der Gleichung absolut konvergent. ■

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f, \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

existieren. Außerdem sei f beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\;dt \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\cdot|\varphi(t)-\varphi_n(t)|\;dt \\ &\le M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)-\varphi_n(t)|\;dt\,,\end{aligned}$$

und letztere ist das M-fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ■

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f, die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k \big(\varphi^{(r)}(t) - \varphi_n^{(r)}(t)\big)\right| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t-Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \le ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k+2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k (1+t^2)\big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,,$$

d.h.

$$\left| t^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\left|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)\right| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\big(\varphi(t)-\varphi_n(t)\big)\right|\;dt \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left| ct^k \big(\varphi(t)-\varphi_n(t)\big)\right|\;dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1+t^2}\,dt = c\pi\cdot\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ■

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f, die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

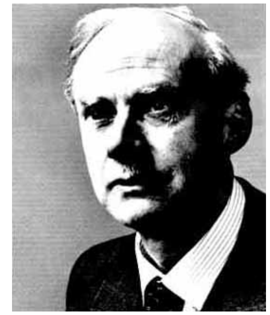
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACsche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACschen Delta-Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt\,.$$

Die Schreibweise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) = f(a)$ findet man nicht nur für Funktionen f aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern oft auch für beliebige stetige Funktionen f.



PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f, so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2\cdot\infty$ überhaupt interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2\cdot\infty = \infty$ tun, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und offensichtlich verschieden sind.

Die Schreibweise mit einer „Funktion" δ ist also in mehrfacher Hinsicht problematisch, hat sich aber gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden. Man sollte sich aber klar machen, daß man nur Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x)f(t)\,dt = f(x)$$

sinnvoll interpretieren kann, in anderen Zusammenhängen hat $\delta(t)$ keine vernünftige Bedeutung.

Problemlos unter einem Integralzeichen sind auch Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\delta(t-t_k)\,,$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\Delta_{t_k}\,,$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\delta(t-t_k)\right)\varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k\Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(t_k)\,,$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren.

So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Da wir nur Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum betrachten, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k \quad\text{oder}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k) \quad\text{als auch}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\varphi(k)\,.$$

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g, die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(g(t)\varphi(t)\big)\,dt = T_f(g\varphi)\,,$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g, nicht aber durch T_f und T_g, wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem