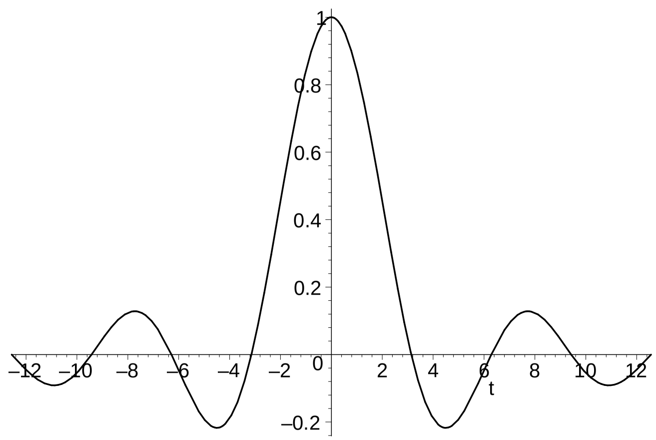


Abb. 16: Die Funktion sinc $t = \frac{\sin t}{t}$

Dagegen existiert die FOURIER-Transformierte $\widehat{h}(\omega)$ nicht einmal, und auch

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^b ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^b = \frac{ia}{\omega}(e^{-i\omega b} - 1)$$

ist deutlich verschieden von $\widehat{f}(\omega)$.

§ 6: Ableitungen und Differentialgleichungen

Als erstes Beispiel für die Nützlichkeit von FOURIER- und LAPLACE-Transformatin wollen wir in diesem Paragraphen die Transformation der Ableitung untersuchen; dies wird unter anderem zu einer wichtigen Anwendung auf die Lösung linearer Anfangswertprobleme führen und wird uns im nächsten Paragraphen auch helfen, wichtige Eigenschaften der FOURIER-Transformation herzuleiten.

Zunächst brauchen wir einige Vorbereitungen über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration:

a) Ableitungen unter dem Integralzeichen

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \int_c^d h(\omega,t)\,dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega,t)\,dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t\in[c,d]$ gilt

$$|h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1-\omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)|\;dt < \varepsilon(d-c)\,.$$

Da $d-c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d-c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega+\Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega+\Delta,t) - h(\omega,t)}{\Delta}\,dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega+\Delta$. Für

$\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a)*, daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi \to \omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)\,dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)\,dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ∎

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h: [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\,dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t)\,d\omega \right) dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b)*, da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega, t)\,d\omega\,dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t)\,d\xi \right) dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\,dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\,dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\,d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ∎

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\,dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\,d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\,dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\,d\omega \right) dt\,.$$

∎

b) Transformationen und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mindestens r mal stetig differenzierbar und existieren die FOURIER-Transformationen von $f, t^r f$ und $f^{(r)}$, so ist

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\begin{aligned}\frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r}\Big(f(t)e^{-i\omega t}\Big)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t)e^{-i\omega t}\,dt = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)\,,\end{aligned}$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t}\,,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt = \quad f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Da die FOURIER-Transformierte von f existiert, $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ gegen null; der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega\widehat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)e^{-i\omega t}\,dt = -i\cdot\widehat{\dot f}(\omega)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für die LAPLACE-Transformation gelten ähnliche Regeln: Falls die Funktion f mindestens r mal stetig differenzierbar ist und die LAPLACE-Transformierten ihrer Ableitungen existieren, ist nach der Regel über partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} \dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(r)}(t)\}(s) = s^r\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{r-1}f(0) - s^{r-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(r-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit sogenannten *Anfangswertproblemen* zu tun, d.h. man kennt den Zustand eines Systems (beschreiben durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0, den wir der Einfachheit halber als null annehmen wollen, und man kennt Naturgesetze für die weitere Entwicklung des Systems. Letztere haben meist die Form von Differentialgleichungen; ein Anfangswertproblem besteht darin, daß man anhand der Differentialgleichung und der bekannten Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 die weitere Entwicklung des Systems berechnen will, d.h. die Funktion f. Es geht also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} & s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)} \\ & + a_{n-1}\big(s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)}\big) \\ & \vdots \\ & + a_1\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) \\ & + a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s) \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

c) Ungedämpfte Schwingungen

Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

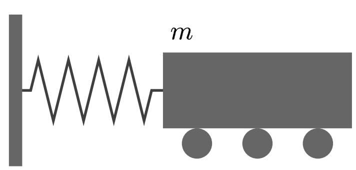


Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformiert en

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

d) Gedämpfte Schwingungen

Ungedämpfte Schwingungen wir im letzten Abschnitt wird man in der Realität eher selten beobachten; in den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird im allgemeinen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung

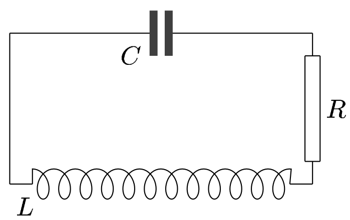


Abb. 18: Ein elektrischer Schwingkreis

erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 18 hintereinanderschalten:

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t),$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t).$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC}.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können,

bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma}.$$

Eine LAPLACE-Transformierte dieser Form haben wir bislang noch nicht gesehen; wir kennen nur Nenner der Form $(s+\lambda)^2+\omega^2$. In diese Richtung führt uns einer der ältesten Tricks der Mathematik, die über 2000 Jahre alte quadratische Ergänzung:

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2}.$$

Diese beiden Summanden erkennen wir als (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right). \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker wird, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto größer ist die Dämpfung. Abbildung 19 zeigt ein Beispiel einer gedämpften Schwingung zusammen mit der Amplitudenfunktion $e^{-\rho t}$.

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir $\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$ setzen und haben

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} .$$

Diesen Ausdruck kennen wir so noch nicht als LAPLACE-Transformierte einer Funktion, aber wir wissen, daß allgemein $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist und können hoffentlich auch noch genügend Bruchrechnung um die Beziehung

$$\frac{1}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{1}{(s+\rho/2)+\omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}$$

nachzurechnen. Damit ergibt sich die LAPLACE-Transformierte zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{y_0(s+\rho/2+\omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s+\rho/2-\omega} \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s+\rho/2+\omega} .
\end{aligned}$$

Diese Summanden können wir als LAPLACE-Transformierte identifizieren: Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Konstanten Eins ist, ist $1/(s+a)$ die von e^{-as}; wir haben hier also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s) \\
- \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s)
\end{aligned}$$

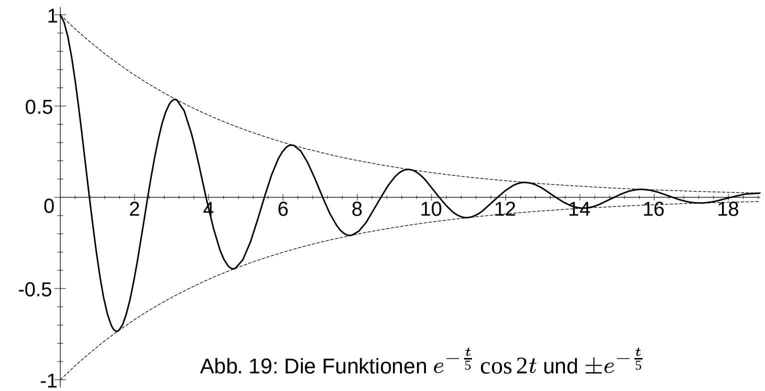


Abb. 19: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}}\cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

und somit

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2+\omega)t} .$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2} ;$$

daher sind dies zwei Exponentialfunktionen, die für $t \to \infty$ gegen null gehen, der Kondensator entlädt sich in diesem Fall also ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier abfallender Exponentialfunktionen. Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in diesem Fall in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}} ;$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall, daß $\sigma = \rho^2/4$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2} \\
&= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2} .
\end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, ist somit

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right) t\right)\ e^{\frac{-\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion. Abbildung 20 zeigt zwei solche Funktionen, eine mit ansteigendem und eine mit abfallendem linearen Faktor.

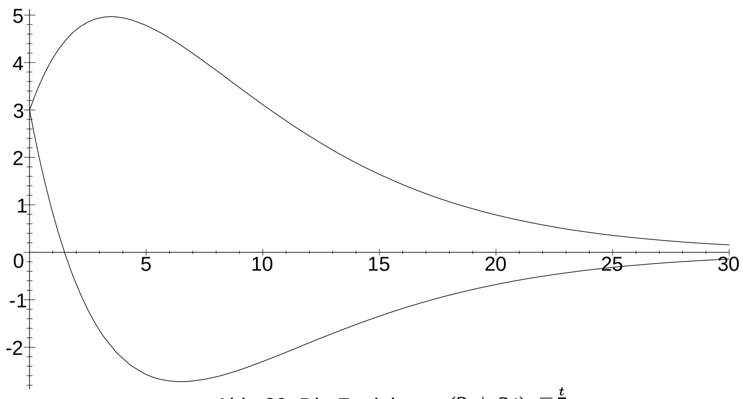


Abb. 20: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

e) Erzwungene Schwingungen

Im Stromkreis aus dem letzten Abschnitt floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 18 durch eine Wechselstromquelle mit Frequenz ω_0; der Einfachheit halber wählen wir die Phase so, daß dieser Wechselstrom durch eine reine Cosinusfunktion der Form $A_0 \cos\omega_0 t$ beschrieben werden kann mit $A_0, \omega_0 > 0$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = A_0 \cos\omega_0 t\,,$$

was wir wieder kurz schreiben als

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c\cos\omega_0 t$$

mit

$$y(t) = Q(t), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad \sigma = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad c = \frac{A_0}{L}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}\,.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung der gerade betrachteten Differentialgleichung. Mit dem zweiten Summanden könnten wir umgehen, wenn nur einer der beiden Faktoren im Nenner stünde; dann hätten wir im wesentlichen die LAPLACE-Transformierte einer Cosinusfunktion.

Genau das gleiche Problem hätten wir, wenn wir eine Stammfunktion des zweiten Summanden suchen würden, und in dieser Situation wüßten wir auch, wie wir weiter vorgehen müßten: Durch Partialbruchzerlegung könnten wir den Integranden in einfachere Brüche zerlegen, deren Stammfunktionen wir kennen. Dieser Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auch bei der LAPLACE-Transformation oft zum Erfolg: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Falls beide Nenner gleich sind, d.h. wenn

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = \omega_0^2$$

ist, funktioniert dies natürlich nicht; diesen Fall werden wir vorläufig zurückstellen. Multiplikation des obigen Ansatzes mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß rechts alle Koeffizienten außer dem von s verschwinden müssen. Beim ersten Koeffizienten bedeutet dies, daß

$$\gamma = -\alpha$$

sein muß, und beim letzten erhalten wir

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta\,.$$

Damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad\text{und}\quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c\,.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho}\cdot\beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2}\cdot\beta\,,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2}\cdot\beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad\text{und}\quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad\text{und}\quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind. Für $\sigma = \omega_0^2$ sind wir in dem Fall, den wir zurückgestellt haben und sehen noch einmal, daß hier der obige Ansatz nicht zu Ziel führt, da die zweite Gleichung zu $0\cdot\beta = c \neq 0$ wird. In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von

$$\sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie auch Abbildung 21 zeigt, die erregende Frequenz durch.

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir eine Funktion finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

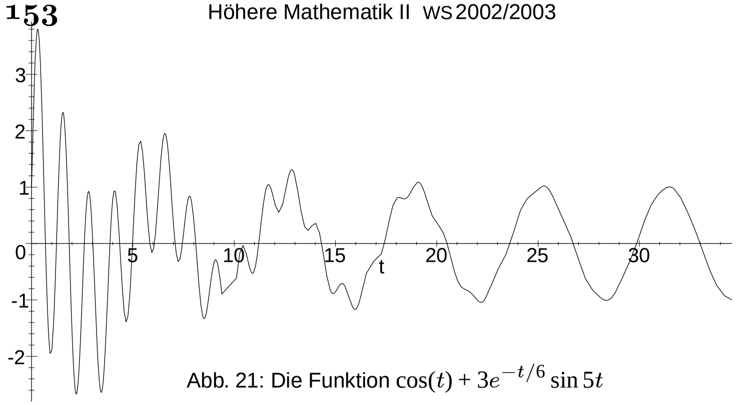


Abb. 21: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6}\sin 5t$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von $1/(s^2+\omega_0^2)$; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds}\frac{-c/2}{s^2+\omega_0^2}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0}\sin\omega_0 t\,,$$

und nach Aussage *b)* des Lemmas aus §6*a* ist (sofern das Integral absolut konvergiert) allgemein

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}f(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)\,.$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0}\cdot t\sin\omega_0 t\right\}(s)\,,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion $t\sin\omega_0 t$ ist in Abbildung 22 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe:* Die

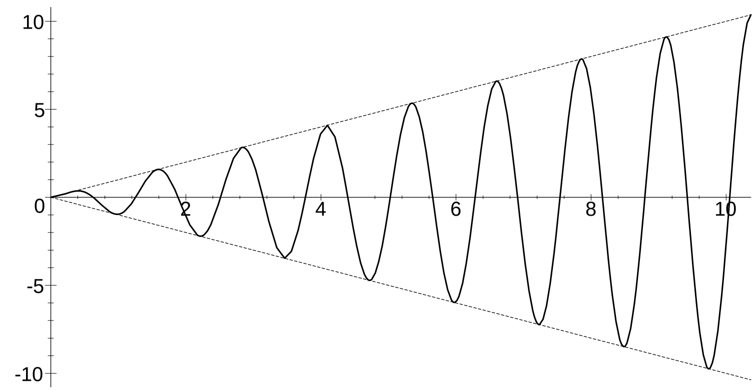


Abb. 22: Die Funktion $t\sin 5t$

erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2\,,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ, daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma=\omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde.Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.

§7: Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum

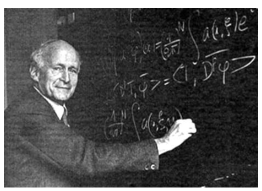
a) Der Schwartz-Raum der stark abfallenden Funktionen

Wie die Beispiele aus §5 zeigen, ist die Existenz von FOURIER- und LAPLACE-Transformationen alles andere als sicher. In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für die es garantiert keine Probleme mit der Existenz der Integrale gibt, und wir wollen für diese Funktionen weitere Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation herleiten. In späteren Abschnitten werden wir diese Ergebnisse dann verallgemeinern auf die Funktionen, die uns wirklich interessieren.

Definition: Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt *stark abfallend*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Funktionen

$$t\mapsto \left|t^r f^{(k)}(t)\right|$$

für alle $k,r\geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ wurde 1915 in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t)=e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t\to\pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a<t<b \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\ .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a,b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t\to a$ oder $t\to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a,b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad\text{und}\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt\ .$$

b) Für $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega\in\mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\ ;$$

für $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t\in\mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\ .$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R})\times\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathbb{C} \\ (f,g)\mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1+t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t) \cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega) \cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*c)*

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_a^b g(t)\overline{g(t)}\,dt\right|}\,,$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. ■

Da mit einer Funktion f auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müßten.

b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a,b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für

$\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

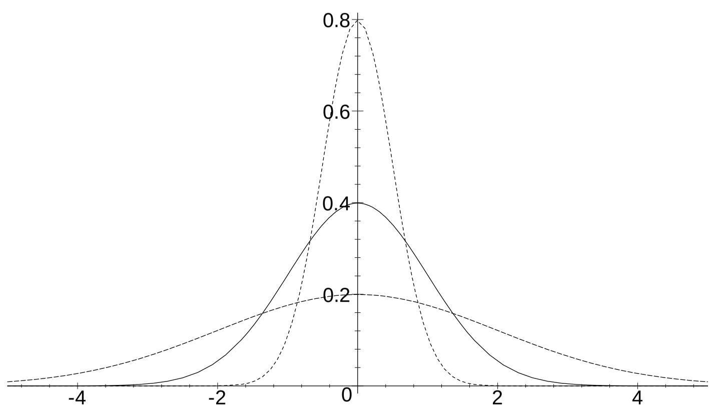


Abb. 23: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot\widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2}+i\omega\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -i\omega\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,,$$

wie man durch Differenzieren von $g(\omega)$ leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\widehat{f}(\omega)}{g(\omega)}\right) &= \frac{d}{d\omega}\left(\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\right)\\ &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega)\cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \widehat{f}(\omega)\cdot\sigma^2\omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\\ &= -\omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0) \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} .$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt .$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = 1 .$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)} e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}} ,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} N_{1/\sigma}(\omega) .$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega) .$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\widehat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t) .$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\widehat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases} .$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) .$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\, d\omega ,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi} \left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\widehat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r \widehat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r \widehat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-i\omega t}\, dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(r)}(t)\right| dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \widehat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r (-i)^k \widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds\right) e^{i\omega t} g(\omega)\, d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega(s-t)}\, d\omega\right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \widehat{g}(s-t)\, ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega) e^{-i\omega s}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}} \frac{d\nu}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}}\, d\nu = \frac{1}{a} \widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right)\,.$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{1}{a} \cdot \widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right) ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + au) \cdot \widehat{h}(u)\, du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(0)\, d\omega = h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi \cdot h(0) \cdot \check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \widehat{h}(u)\, du = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u)\, du = 2\pi \cdot f(t) \cdot \check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\hat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\hat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\check{\hat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\hat{\check{f}}(\omega) = 2\pi\check{\check{f}}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\hat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)\,dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi\check{\hat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty}\overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***)\\
&= \overline{\hat{g}}(-\omega)\,,
\end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\overline{\hat{g}}(t) = \overline{\hat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
(f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\hat{f}}(-t)\overline{\hat{\hat{g}}}(-t)\,dt \\
&\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\hat{\hat{f}}}(-t)\overline{\hat{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\overline{\hat{g}}(-t)\,dt \\
&\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\hat{\overline{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \hat{g})\,.
\end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f}, \check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\hat{\check{f}}, \hat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f, g)\,.$$

■