§5: Fourier- und Laplace-Transformationen

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind: Da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben.

Daher brauchen wir für nichtperiodische Funktionen im Allgemeinen ein kontinuierliches Frequenzspektrum; dieses liefert uns für hinreichend gutartige Funktionen die FOURIER-Transformation. Die LAPLACE-Transformation ist eine Variante davon, die zwar inhaltlich etwas schwerer zu interpretieren ist als die FOURIER-Transformation, die dafür aber für größere Funktionenklassen existiert und rechnerisch besser handhabbar ist; außerdem gibt es zur LAPLACE-Transformation sehr viel ausführlichere Tabellen als zur FOURIER-Transformation

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Zur Konstruktion der FOURIER-Transformation gehen wir aus von FOURIER-Reihen:

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist die FOURIER-Reihe von f_T gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ki\omega t}\,dt\,.$$

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T}C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}C(k\omega)\,,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert. Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Um dies genauer zu untersuchen, geben wir diesen Konstruktionen Namen:

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi \check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen.

Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

definiert, wobei j,wie in der Elektrotechnik üblich, für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht. Demnach ist also $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden, so daß je nach Buch durchaus sehr verschiedene Dinge gemeint sein können, wenn von „der" FOURIER-Transformation und ihrer Umkehrung die Rede ist. In allen Fällen sind die Faktoren aber so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

b) Die Laplace-Transformation

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Offensichtlich hat das FOURIER-Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei vielen Anwendung interessieren Funktionen vor allem für positive Werte von t (die „Zukunft"), während negative Werte (die „Vergangenheit") vernachlässigt werden können. Um daher eine gegebene

Funktion f so abzuändern, daß das FOURIER-Integral an der unteren Grenze keine Konvergenzprobleme mehr hat, setzen wir sie für $t < 0$ einfach auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; schließlich soll das Ergebnis noch etwas mit der Funktion f zu tun haben. Deshalb dämpfen wir hier die Funktion nur durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = f(0^+) = \lim_{t\to 0+} f(t) .$$

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, in Zeichen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt .$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die inverse LAPLACE-Transformation läßt sich aus der inversen FOURIER-Transformation ableiten: Wegen $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ sollte $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$ sein; für $t > 0$ sollte daher

$$f(t) = e^{rt} g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein. Für $t < 0$ können wir natürlich keine entsprechende Formel erwarten, da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der Berechnung der LAPLACE-Transformation ignoriert werden.

c) Erste Eigenschaften und erste Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \sin\omega t$. Ihr FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\, e^{-i\omega t}\,dt$$

ist ein unendliches Integral über eine periodische Funktion, existiert also nicht. Das LAPLACE-Integral

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}\,dt$$

existiert für rein imaginäres $s = i\omega$ aus dem gleichen Grund nicht, und für ein s mit negativem Realteil kann es natürlich schon gar nicht existieren. Ist aber $\mathfrak{Re}\, s > 0$, so liefert die Regel für partielle Integration

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}\,dt = \sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \omega\cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

etwas Verwertbares: e^{-st} geht dann nämlich für $t \to \infty$ gegen null, und an der unteren Grenze $t = 0$ verschwindet $\sin\omega t$, so daß der erste Summand rechts insgesamt verschwindet. Der Integral ganz hinten ist bis auf den Faktor $-\omega/s$ die LAPLACE-Transformierte des Cosinus, d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) .$$

Auf das LAPLACE-Integral für den Cosinus wenden wir wieder die Regel der partiellen Integration an:

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}\,dt = \cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \omega\sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt .$$

Hier bekommen wir an der unteren Grenze des ersten Terms rechts den Wert eins für den Cosinus, und an der oberen Grenze geht natürlich wieder der Exponentialfaktor gegen null, so daß

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

ist. Insgesamt ist

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

oder

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2}\,.$$

Multiplikation mit s^2 macht daraus

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \omega \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

für $\mathfrak{Re}\, s > 0$. Damit kennen wir auch

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Tatsächlich kennen wir sogar die LAPLACE-Transformation eines beliebigen trigonometrischen Polynoms, denn wegen der Linearität der Integration gilt offensichtlich

Lemma: Sowohl die FOURIER- als auch die LAPLACE-Transformation sind lineare Operationen, d.h. für zwei Funktionen f, g und zwei komplexe Zahlen λ, μ gilt

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda\widehat{f}(\omega) + \mu\widehat{g}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda\mathcal{L}\{f\}(s) + \mu\mathcal{L}\{g\}(s)\,,$$

sofern jeweils beide Seiten existieren. ■

Damit ist etwa

$$\mathcal{L}\{a\cos\omega t + b\sin\omega t\}(s) = \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\,,$$

und entsprechend läßt sich auch die LAPLACE-Transformation jedes trigonometrischen Polynoms berechnen.

Wir können noch einen Schriff weiter gehen und die LAPLACE-Transformation auch auf eine gedämpfte Schwingung

$$e^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

anwenden, denn allgemein gilt:

Lemma: Falls beide Seiten existieren, ist für jedes $c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-c)\,.$$

Zum *Beweis* rechnen wir einfach nach:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{ct}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-c)t}\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-c)\,.$$

■

Damit ist also beispielsweise

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\}(s) = \frac{a(s+\lambda)+b\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Als nächstes wollen wir „richtige“ Polynomfunktionen betrachten; wie das erste der obigen Lemmata zeigt, reicht es dazu, die Transformationen der Potenzfunktionen $t \mapsto t^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten.

Beim FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} t^n \sin\omega t\,dt$$

gibt es offensichtlich keine Chance, daß es existiert; selbst der CAUCHYsche Hauptwert existiert nicht, denn wenn der Integrand des Realteils ungerade ist, ist der des Imaginärteils gerade und umgekehrt.

Die LAPLACE-Transformation verlangt die Berechnung von

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral können wir durch die aus **[HM1]**, *Kap. II*, §3*l* bekannte *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ausdrücken: mit der Substitution $u = st$ wird

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n} e^{-u}\,\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} .$$

Wie wir damals nachgerechnet haben, ist

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 ,$$

also

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} .$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit nach obigem Lemma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} \\ &= \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}} . \end{aligned}$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} ,$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Als nächstes wollen wir negative Potenzen t^{-n} betrachten. Deren LAPLACE-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{t^{-n}\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^n}\,dt ,$$

und dieses sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze uneigentliche Integral existiert leider nicht: Für reelles $s > 0$ etwa ist für jedes $a > 0$ die Funktion e^{-as}/t^n überall im Intervall $(0, a]$ kleiner

oder gleich dem Integranden; da ihre Stammfunktion $e^{-as}/(1-n)t^{n-1}$ für $n > 1$ und $e^{-as} \ln t$ für $n = 1$ für $t \to 0$ gegen unendlich geht, existiert das Integral

$$\int_0^a \frac{e^{-as}}{t^n}\,dt$$

für kein $a > 0$, und damit existiert erst recht das obige LAPLACE-Integral nicht.

Dafür aber existiert in diesem Fall zumindest der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt \,!$$

Für $n = 1$ haben wir in §3*f)* im Zusammenhang mit dem Integralsinus nachgerechnet, daß

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = \pi i \quad \text{für alle } \omega > 0 .$$

Ersetzen wir hier ω durch $-\omega$, wird der Integrand komplex konjugiert, also auch der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals, und damit ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = -\pi i \quad \text{für alle } \omega < 0 .$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t$, das natürlich ebenfalls nicht existiert, das aber den CAUCHYschen Hauptwert null hat, da der Integrand ungerade ist. Der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist also

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t}\,dt = \begin{cases} -\pi i & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ \pi i & \text{für } \omega < 0 \end{cases} .$$

Für $n > 1$ kann man genau wie in §3f) argumentieren und erhält (mit den dortigen Bezeichnungen) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz$$

für den CAUCHYschen Hauptwert. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt auf

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-n}}{k!}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz\,.$$

Für $k = n-1$ ist das rechtsstehende Integral

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1}\,dz = \mathrm{Ln}(\delta) - \mathrm{Ln}(-\delta) = \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \neq n-1$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz = \frac{\delta^{k-n+1} - (-\delta)^{k-n+1}}{k}$$

für $k \equiv n-1 \bmod 2$ und ist gleich $2\delta^k/k$ sonst. Da die geometrische Reihe $2\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \to 0$ gegen null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz = \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \pi i \quad \text{für } \omega > 0\,.$$

Für $\omega < 0$ wird wieder der Integrand komplex konjugiert, also auch das Ergebnis; im Faktor $(i\omega)^{n-1}$ sorgt ω selbst für die komplexe Konjugation, so daß rechts nur πi konjugiert werden muß, d.h. der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt = \begin{cases} -\frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \\ \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \end{cases}.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t^n$, daß für ungerades n den CAUCHYschen Hauptwert null hat und für gerades n gegen unendlich divergiert.

Um wenigstens ein Beispiel eines nicht nur als CAUCHYscher Hauptwert existierenden FOURIER-Integrals zu sehen, wollen wir als letztes Beispiel den Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$
$$= \frac{a}{\omega}\,\frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega) = 2ab\operatorname{sinc}\omega b\,.$$

Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.

Die LAPLACE-Transformierte dieses Rechteckimpulses ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{b} ae^{-st}\,dt = \frac{a}{s}\left(1 - e^{-sb}\right),$$

und das ist gleichzeitig auch die LAPLACE-Transformierte der Rechteckimpulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$