

und

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t dt = 0.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und *alle* sind rein reell durchführbar. Dennoch spart der Umweg übers Komplexe viel Zeit.

d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

Die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ bilden natürlich keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, genauso wenig wie die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin \ell\omega t$ eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden: Basisdarstellungen sind schließlich stets *endliche* Linearkombinationen, und eine endliche Linearkombination von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen ist insbesondere stetig.

Trotzdem ist es ganz nützlich, zur Demonstration der weiteren Vorgehensweise zunächst die Untervektorräume zu betrachten, die von diesen Funktionen erzeugt werden:

Definition: a) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{C})$ aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{R})$ aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $\cos k\omega t$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und den Funktionen $\sin \ell\omega t$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Die gerade bewiesenen Orthogonalitätsrelationen können wir dann auch so formulieren, daß die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{C})$ bilden, während die Funktionen $1, \sqrt{2} \cos k\omega t$ und $\sqrt{2} \sin \ell\omega t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{R})$ bilden.

Zumindest für Funktionen aus $P_T(\mathbb{C})$ und $P_T(\mathbb{R})$ ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann: Ist allgemein V ein

EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum und \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V , so läßt sich ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in V$ gemäß

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \langle \vec{v}, \vec{b} \rangle \vec{b}$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.

Für $f \in P_T(\mathbb{C})$ ist somit

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k i \omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \langle f(t), e^{k i \omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k i \omega t} dt,$$

und für $f \in P_T(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$c_0 = \langle f(t), 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \cdot \langle f(t), \sqrt{2} \cos k\omega t \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_\ell = \sqrt{2} \cdot \langle f(t), \sqrt{2} \sin \ell\omega t \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt.$$

Die Summen in diesen Formeln sind natürlich nur formal unendlich; da ein trigonometrisches Polynom nach Definition *endliche* Linearkombination der Basisfunktionen ist, können in jeder dieser Summen höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sein.

Da die Formeln für reelle trigonometrische Polynome deutlich unangenehmer sind als die für komplexe, lohnt es sich auch oft, für reelle Funktionen den Umweg über das Komplexe zu gehen. Das ist immer

möglich, denn auf Grund der EULERSchen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes:

$$\begin{aligned} & a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \sin \ell\omega t \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \frac{e^{\ell\cdot i\omega t} - e^{-\ell\cdot i\omega t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} - i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{\ell\cdot i\omega t} + i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{-\ell\cdot i\omega t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} . \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k\cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert. Aus obigen Formeln folgt auch, daß umgekehrt

$$a_k = 2 \Re c_k \quad \text{und} \quad b_\ell = -2 \Im c_\ell$$

ist; man kann also leicht zwischen reeller und komplexer Darstellung umrechnen.

Damit ist auch klar, daß $P_T(\mathbb{R}) = P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist; die reellen trigonometrischen Polynome sind also genau jene komplexe trigonometrische Polynome, die nur reelle Werte annehmen

Gefühlsmäßig würde man trigonometrische Polynome nicht wohl nicht so definieren wie in diesem Abschnitt, sondern als Polynome in $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$. Als kleine Anwendung obiger Überlegung folgt, daß dies in der Tat trigonometrische Polynome im Sinne der hießigen Definition sind, denn wegen der EULERSchen Formel ist klar, daß es komplexe

trigonometrische Polynome sind, und natürlich nehmen sie nur reelle Werte an.

e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Die Bedingung, daß $f(t)$ als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit obiger Resultate leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{ik\omega t})$ berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von f nützlich sind; wir definieren

Definition: Die FOURIER-Transformierte einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto (f, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k\cdot i\omega t} dt . \end{cases}$$



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomitee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformierte einer *periodischen* Funktion nur auf \mathbb{Z} definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).

Als *komplexe FOURIER-Reihe* von f bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-k \cdot i \omega t},$$

als *reelle FOURIER-Reihe* von $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ entsprechend

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell\omega t$$

mit c_0 , a_k und b_{ℓ} wie im vorigen Abschnitt.

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summen überhaupt existieren, d.h. also, ob die angegebenen Reihen für alle (oder zumindest fast alle) $t \in \mathbb{R}$ konvergieren, noch ist klar, ob sie dort, wo sie konvergieren, gegen der Funktionswert $f(t)$ konvergieren.

§ 3: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnutzen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T

ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T , so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit } 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall $0 \leq \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt &= \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_0^{\tau} g(t) dt \\ &= \int_0^{\tau} g(t) dt + \int_{\tau}^T g(t) dt = \int_0^T g(t) dt. \end{aligned}$$

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_{\ell} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t) \cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t) \sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle ℓ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell\omega t dt \right) \\ &= \frac{2h}{T} \left(-\frac{\cos \ell\omega \frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} + \frac{\cos \ell\omega T - \cos \ell\omega \frac{T}{2}}{\ell\omega} \right) \\ &= \frac{2h}{T} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1 + 1 + (-1)^{\ell+1}}{\ell\omega} \right), \end{aligned}$$

denn da $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{2h}{T} \cdot \frac{4}{\ell\omega} = \frac{4h}{\pi\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0, T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0, T]$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ unterscheiden, was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden

Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega \frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen den Mittelwert null der beiden Funktionswerte.)

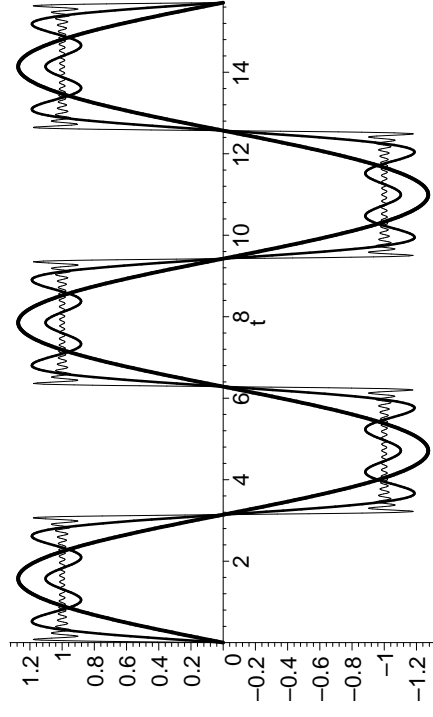


Abb. 5: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung fünf zeigt die Teilsummen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20 Summanden, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwüngen an den Unstetigkeitsstellen von f : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwüngen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen

Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung fünf zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlungen nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei den Standardgehäusen hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen ihre eigenen Spezialgehäuse.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T-t}{4} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz \mathbb{R} .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell \omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{T-t}{4} \right) \sin \ell \omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell \omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot \dot{v}(t) dt = u(t) \cdot v(t) - \int \dot{u}(t) \cdot v(t) dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot{v}(t) = \sin \ell \omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell \omega} \cos \ell \omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell \omega t dt &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell \omega} \int \cos \ell \omega t dt \\ &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell^2 \omega^2} \sin \ell \omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left(\frac{-T \cdot \cos \ell \omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell \omega} + \frac{\sin \ell \omega T - \sin 0}{\ell^2 \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell \omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell \omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 6 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Der Sinus hyperbolicus

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

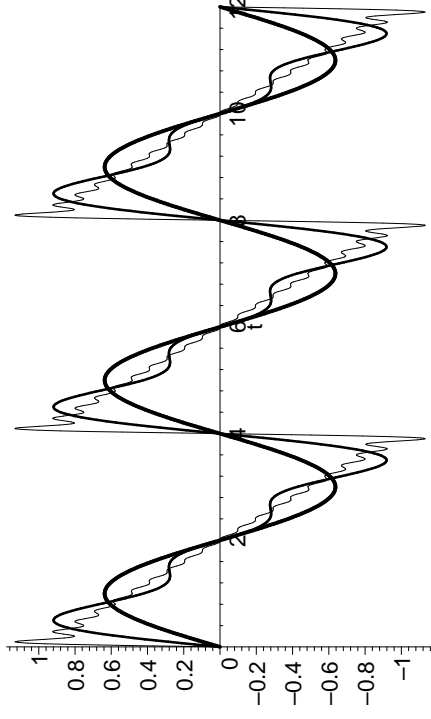


Abb. 6: FOURIERpolynome für die Sägezahn-schwingung

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i \omega t} dt$$

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi, \pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$ für $0 < t \leq 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π , und das ist, wie die Abbildungen sieben und acht zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$ be-

sames Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

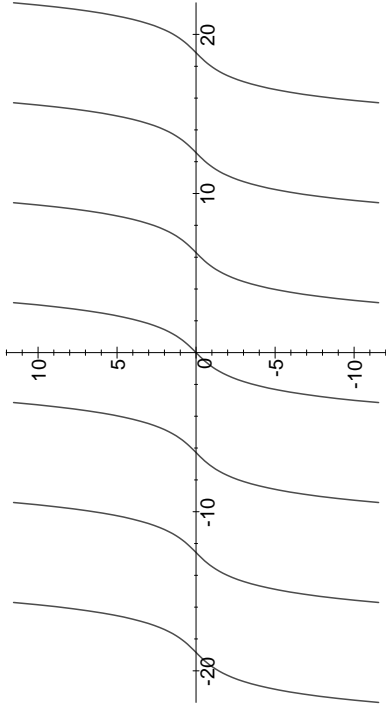


Abb. 7: Die Funktion $f(t)$

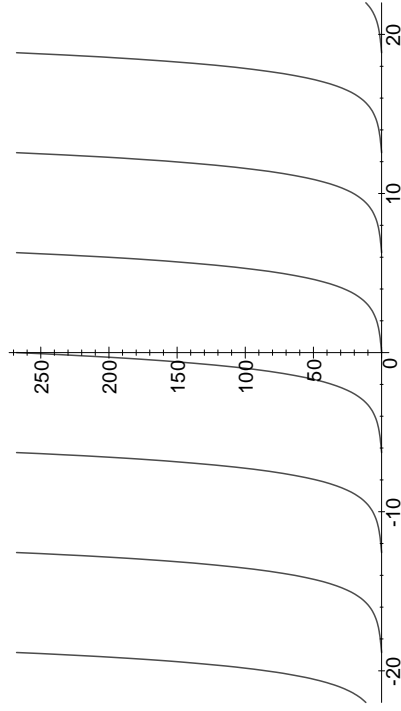


Abb. 8: Die Funktion $g(t)$

grenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung neun in ein gemein-

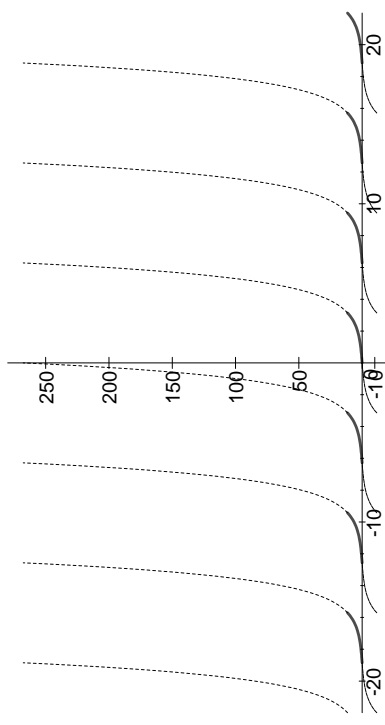


Abb. 9: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurück-

geführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{t(1-ki)} \pi}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)} \pi}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\
 &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\
 &= \frac{(-1)^k \sinh \pi}{2\pi} \frac{\sinh \pi}{1+k^2} - (1-ki) \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2+1}.
 \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die Cosinusterme weg, während sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen:

Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{t(1-i\ell)}}{4i} + \frac{e^{-t(1-i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{4i} \text{ ist } \frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{\pm 4i(1\pm i\ell)}.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned}
 &\frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\
 &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.h. } b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{-\pi} \\
 &= \frac{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})}{4\pi i(1+i\ell)} \\
 &= \frac{-(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})}{4\pi i(1-i\ell)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1+i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1-i\ell)} \\
 &= (-1)^\ell \left(\frac{\sinh \pi}{\pi i(1+i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1-i\ell)} \right) \\
 &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left(\frac{1}{1+i\ell} - \frac{1}{1-i\ell} \right) \\
 &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{(1-i\ell) - (1+i\ell)}{(1+i\ell)(1-i\ell)} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2+1}.
 \end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t \, dt \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left(\sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt \right) \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left((-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Cosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnsschwingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ sind Stammfunktionen der Funktio-

nen $\cos \ell \omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left(\frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau \, d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N -ten Teilsumme und $f(t)$ als Integral:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left(\sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\ &= \int_{T/2}^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Cosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell i \omega \tau} + e^{-\ell i \omega \tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell i \omega \tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N i \omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell i \omega \tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1 - q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1-q^{r+1}}{1-q}.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell i\omega\tau} = \frac{1 - e^{(2N+1)i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell\omega\tau &= \frac{1}{2} e^{-N i\omega\tau} \frac{1 - e^{(2N+1)i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N i\omega\tau} - e^{(N+1)i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2}i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2})i\omega\tau} - e^{(N+\frac{1}{2})i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega\tau} - e^{\frac{1}{2}i\omega\tau}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega\tau}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \quad \text{und} \quad v(\tau) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega t}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega \frac{T}{2} = \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert v_{\max} als auch seinen Minimalwert v_{\min} an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \int_{T/2}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega t}{(2N + 1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin \frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}},$$

und da der Cosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T , gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ist $\sin \frac{\omega t}{2} \geq \sin \frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin \frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{t}{2} = \frac{T}{4}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{4} + \frac{3T}{4} - \frac{t}{2} = -\frac{t}{4}.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{t}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T . Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega\left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell\omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell\omega T}{2} - \ell\omega t\right)}{\ell\omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell\pi - \ell\omega t)}{\ell\omega}. \end{aligned}$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen fünf und sechs zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)\cdot i\omega\tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} = e^{(-2N+1)\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell\cdot i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$\begin{aligned} e^{-2N\cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} &= \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau}} \frac{1 - e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} \\ &= \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau} - e^{2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \end{aligned}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau.$$

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwängung. Abbildung zehn zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

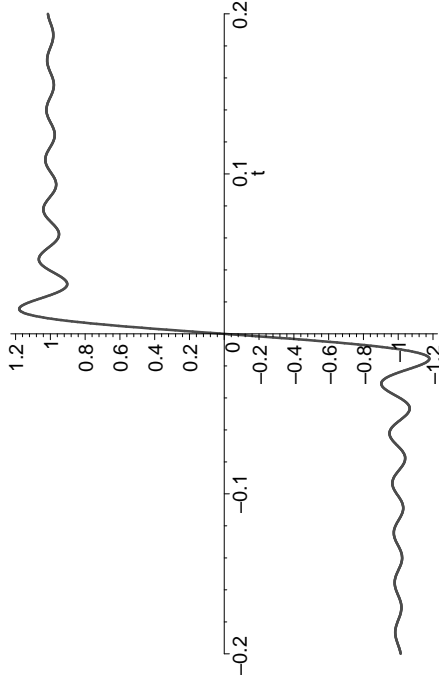


Abb. 10: Das Gibbsphänomen in Großaufnahme

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwängung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen: