§ 2: Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird dann sein, eine (fast) *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x,t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der (x,y)-Ebene stattfindet, ist $f(x,t)$ also die y-Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t. Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$\big(x, f(x,t)\big)\ ;$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x-Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z-Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x-Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L,t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x,t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x,t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung eins zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

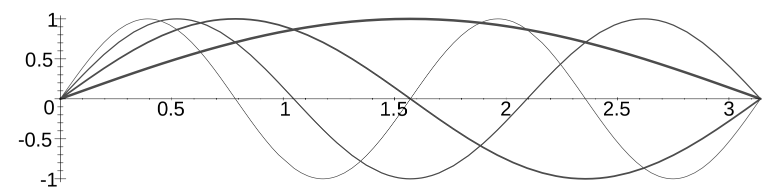

Abb. 1: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1*f)* etwa ist das Beispiel der g-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung zwei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven zeichnen und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter `http://www.gac.edu/~huber/fourier/`)

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse der Koeffizienten in Abbildung drei sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

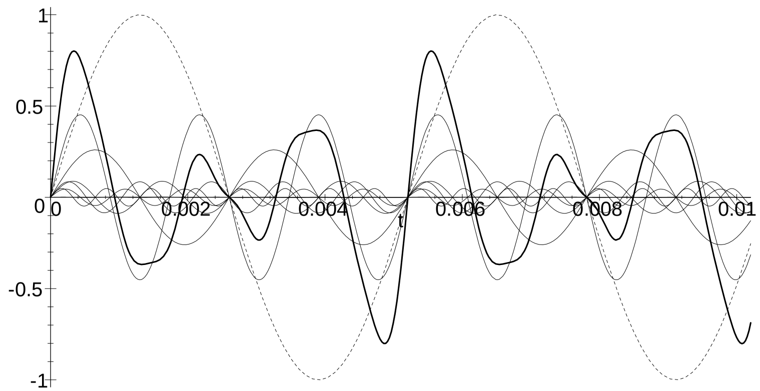

Abb. 2: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

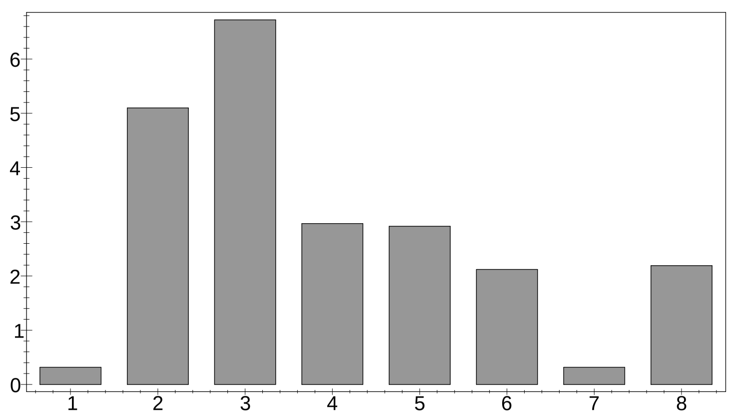

Abb. 3: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir

versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t\,,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x,t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) .$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω.

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ.

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung.* Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L/L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L/L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x-Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y-Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x,t)\,,$$

die die y-Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β. Falls x_1 und x_2 einigermaßen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\gamma}\,,$$

denn der Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos\gamma$ gestreckt.

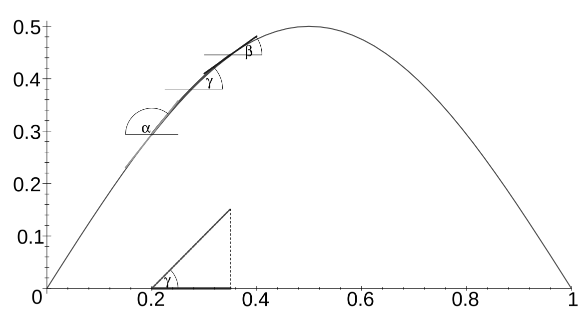

Abb. 4: Eine ausgelenkte Saite

Die Rückstellkraft *in Richtung der ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}\,,$$

und die Komponente in y-Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\alpha$$

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\beta\,.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2)\,.$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big)\,.$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos\gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big)\,.$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x-Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0,t)\,,$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}\,.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\ddot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L}\ddot{h}(t)\,.$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L}\ddot{h}(t)\,.$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x,t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x,t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x,t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x,t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x,t)\,,$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x,t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x,t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x,t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x,t)\,.$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \underset{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0}\,.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x,t) = c^2 f_{xx}(x,t)\,.$$

Sie allein legt $f(x,t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ *irgendwelche* zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTsche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite;* die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x,t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = a \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_t(x,t) = a\omega \cdot \cos\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

$$f_{tt}(x,t) = -a\omega^2 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\omega^2 f(x,t)$$

$$f_x(x,t) = a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}\right)$$

$$f_{xx}(x,t) = -a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x,t)\,,$$

also ist

$$f_{tt}(x,t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x,t)\,.$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}\,.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k, die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Orthogonalitätsrelationen

Wie eingangs erwähnt, wollen wir in diesem Paragraphen (fast) beliebige periodische Funktionen durch Linearkombinationen von reinen Schwingungen beschreiben; bevor wir damit beginnen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche Funktionen genau wir betrachten wollen.

Wir dürfen uns auf keinen Fall nur auf stetige Funktionen beschränken; Rechteckimpulse beispielsweise spielen eine sehr wichtige Rolle in der Informationstechnik. Andererseits wollen wir aber nicht soweit gehen, auch Funktionen wie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für rationale } t \\ \cos t & \text{für irrationale } t \end{cases}$$

zu betrachten, wir müssen also einen Kompromiss finden.

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f keine Häufungspunkte hat und wenn für jede Unstetigkeitsstelle t_0 die links- und rechtsseitigen Limites

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

existieren.

Damit sind also Rechteckimpulse und allgemeiner alle Funktionen, die bis auf isolierte Sprungstellen stetig sind, stückweise stetig.

Auch periodische Funktionen sollten wir vorsichtshalber zumindest einmal formal definieren:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch zur Periode* T, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t)\,.$$

Ist f peridiodisch zur Periode T, so offensichtlich auch zur Periode $2T$ oder $-5T$ *usw.*; falls es einen kleinsten positive Wert T gibt, zu dem f periodisch ist, bezeichnen wir diesen als *die* Periode von f. In diesem Sinne haben also $\sin t$ und $\cos t$ *die* Periode 2π, wohingegen konstante Funktionen für jedes $T \in \mathbb{R}$ periodisch zur Periode T sind, so daß wir hier nicht von *der* Periode reden können.

Eine periodische Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte in irgendeinem abgeschlossenen Intervall J der Länge T, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $t - kT \in J$, und wegen der Periodizität muß $f(t) = f(t-kT)$ sein. Ein solches Intervall der Länge T bezeichnen wir kurz als ein *Periodenintervall.*

Da jede unendliche Menge in einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ einen Häufungspunkt hat, kann eine stückweise stetige Funktion in jedem solchen Intervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben; insbesondere gibt es also bei einer stückweise stetigen periodischen Funktion in jedem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, und durch diese sind *alle* Unstetigkeiten der Funktion festgelegt.

Wir betrachten im folgenden für jede reelle Zahl $T > 0$ die beiden Mengen

$$L_T(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}$$

und

$$L_T(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}.$$

Da Linearkombinationen periodischer Funktionen zur selben Periode T wieder periodisch mit T sind und die Nullfunktion periodisch ist zu jeder Periode, ist $L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $L_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Durch die Vorschrift

$$(f,g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt$$

können wir auf $L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ein Produkt definieren, das *fast* alle Eigenschaften eines Skalarprodukts hat: Symmetrie und Bilinearität sind klar, und da Quadrate in $\mathbb{R}$ stets nichtnegativ sind, ist auch für alle $f \in L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$(f,f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt \ge 0\,.$$

Leider kann aber für eine nur stückweise stetige Funktion $(f,f) = 0$ sein, ohne daß f gleich der Nullfunktion wäre, beispielsweise für

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist $L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kein EUKLIDischer Vektorraum; das gerade eingeführte Produkt wird uns aber trotzdem im folgenden sehr nützlich sein.

Entsprechend definieren wie auf $L_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ein Produkt durch

$$(f,g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\,;$$

es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts *außer* der positiven Definitheit.

Fundamental für das weitere ist die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

Lemma: Mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ und $k,\ell \in \mathbb{Z}$ ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \ne \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

Beweis:

$$T\cdot(e^{ik\omega t},\, e^{i\ell\omega t}) = \int_0^T e^{ik\omega t}\overline{e^{i\ell\omega t}}\,dt = \int_0^T e^{ik\omega t}e^{-i\ell\omega t}\,dt$$
$$= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t}\,dt\,.$$

Für $k = \ell$ integrieren wir hier die Konstante eins über ein Intervall der Länge T, das Integral ist also T. Für $k \neq \ell$ hat der Integrand die Stammfunktion

$$\frac{e^{i(k-\ell)\omega t}}{i(k-\ell)}\,,$$

die wegen der Beziehung $\omega T = 2\pi$ periodisch ist mit Periode T; das Integral verschwindet also. Division durch T liefert die Behauptung. ■

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil, erhalten wir die etwas umständlicheren entsprechenden Beziehungen für trigonometrische Funktionen. Da Cosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative k und ℓ uninteressant; wir begnügen uns daher mit

Lemma: Mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ und $k,\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(\cos k\omega t,\, \cos \ell\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}\,,$$
$$(\sin k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und}$$
$$(\cos k\omega t\ \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Beweis: Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit

dem KRONECKER-δ ausgedrückt

$$\delta_{k\ell} = (e^{ik\omega t},\, e^{i\ell\omega t}) = (\cos k\omega t + i\sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t + i\sin \ell\omega t)$$
$$= (\cos k\omega t,\, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t,\, \sin \ell\omega t)$$
$$+\, i(\sin k\omega t,\, \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t,\, \sin \ell\omega t)\,,$$

also ist

$$(\cos k\omega t,\, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t,\, \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir ℓ durch $-\ell$ ersetzen; sie werden dann zu

$$(\cos k\omega t,\, \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = \delta_{k,-\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t,\, \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Addiert *bzw.* subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für $k,\ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t,\, \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}\,;$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t,\, \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t,\, \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t\ \cos \ell\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$