PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) war Kommandant eines Ingenieurkorps der französischen Armee und leitete unter anderem den Ausbau des Hafens von Le Havre. Seine Arbeit über die LAURENT-Reihe reichte er etwas zu spät für den großen Preis der Akademie von 1842 ein, so daß sie trotz CAUCHYs Fürsprache nicht berücksichtigt wurde. Ansonsten schrieb er anscheinend nur noch zwei weitere Arbeiten, die erst von seiner Witwe bei der Akademie eingereicht wurden. Eine erschien 1863, die andere nie.

Eine LAURENT-Reihe unterscheidet sich also dadurch von einer TAYLOR-Reihe, daß auch endlich viele negative Summanden haben kann, falls nämlich n negativ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Funktion f im Punkt z_0 einen Pol hat, und falls n minimal gewählt wird, falls also $a_{-n} \neq 0$ ist, handelt es sich dabei offenbar genau um einen Pol n-ter Ordnung: Multipliziert man nämlich die LAURENT-Reihe mit $(z-z_0)^n$, so verschwinden alle negativen Potenzen; sie wird also zur TAYLOR-Reihe einer holomorphen Funktion. Multipliziert man dagegen mit einer kleineren Potenz von $(z-z_0)$, so steht nach a_{-n} weiterhin eine negative Potenz, das Produkt wird also für $z = z_0$ weiterhin unendlich.

Die Summe

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_{-\ell}}{(z-z_0)^\ell}$$

der Terme mit negativen Potenzen wird als *Hauptteil* der meromorphen Funktion $f(z)$ im Punkt z_0 bezeichnet; offensichtlich ist die Differenz $f(z) - H(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, da sie dort durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden kann.

Über die Hauptteile einer meromorphen Funktion läßt sich die altbekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen neu verstehen: Ist $f(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, Quotient zweier Polynome also, und hat der Nenner die komplexen Nullstellen $z_1, \ldots, z_r$ mit Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$, so hat die LAURENT-Reihe im Punkt z_ν einen Hauptteil der Form

$$H_\nu(z) = \sum_{k=1}^{e_\nu} \frac{a_{-k,\nu}}{(z-z_\nu)^k} .$$

Da die Differenz $f(z) - H_\nu(z)$ im Punkt z_ν holomorph ist, haben wir

nach Subtraktion *aller* Hauptteile eine auf ganz $\mathbb{C}$ rationale Funktion

$$h(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{r} H_\nu(z) ;$$

das Nennerpolynom von h hat also keine Nullstelle. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist ein Polynom ohne komplexe Nullstelle notwendigerweise konstant, die Funktion $h(z)$ ist also ein Polynom, und wir haben die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = h(z) + H_1(z) + \cdots + H_r(z) .$$

Berechnet wird sie im allgemeinen natürlich nicht über die Integraldarstellung der Koeffizienten in den Hauptteilen, sondern über einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten, so wie wir es bereits im letzten Semester gemacht haben. Ein solcher Ansatz ist aber nur gerechtfertigt, wenn zumindest die *Existenz* einer solchen Zerlegung klar ist; im letzten Semester hatten wir dies mit dem EUKLIDischen Algorithmus bewiesen; hier liefern die LAURENT-Reihen einen alternativen Beweis.

LAURENT-Reihen sind auch nützlich in der diskreten Signalverarbeitung, wo man es mit Folgen $(a_k)_{k \geq n}$ reeler oder komplexer Zahlen zu tun hat, nämlich dem Wert des Signals zum Zeitpunkt $t = k$. Einer solchen Folge ordnet man ihre z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

zu, aus der wiederum sich die Folge der a_k nach obigen Formeln rekonstruieren läßt durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{X(w)\,dw}{w^{k+1}} .$$

Die z-Transformation wird vor allem angewandt, um rekursiv definierte Folgen zu bestimmen oder (was äquivalent ist) sogenannte Differenzengleichungen zu lösen; ihre Nützlichkeit kommt daher, daß bei einer Schaltung der Zustand zu einem gegebenen Zeitpunkt meist relativ einfach als Funktion der Zustände in den vorausgegangenen Takten ausgedrückt werden kann.

Wir betrachten hier nur ein ganz einfaches Beispiel, in dem weder komplexe Zahlen noch Koeffizienten mit negativem Index auftauchen:

Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = 3a_k + 1 \;\; \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Dann ist überall dort, wo beide Seiten konvergieren, auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1) z^k \,.$$

Mit $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist die rechte Seite gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1) z^k = 3X(z) + \sum_{k=0}^{\infty} = 3X(z) + \frac{1}{1-z} \,;$$

die linke ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \frac{X(z) - 1}{z} \,,$$

denn $a_0 = 1$. Somit ist

$$\frac{X(z)-1}{z} = 3X(z) + \frac{1}{1-z}$$

und

$$\left(\frac{1}{z} - 3\right) X(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(1-z)} \,,$$

also

$$X(z) = \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{\frac{1}{z} - 3} = \frac{\frac{1}{1-z}}{1-3z} = \frac{1}{(1-z)(1-3z)} \,.$$

Von letzterer Funktion brauchen wir die LAURENT-Entwicklung; die bekommen wir am einfachsten durch Partialbruchzerlegung: Nach der allgemeinen Theorie läßt sich der Bruch schreiben als

$$\frac{1}{(1-z)(1-3z)} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-3z} = \frac{a(1-3z) + b(1-z)}{(1-z)(1-3z)} = \frac{(a+b) - (3a+b)z}{(1-z)(1-3z)} \,;$$

a und b können also leicht berechnet werden als die Lösungen $a = -1/2$ und $b = 3/2$ des linearen Gleichungssystems

$$a + b = 1 \quad \text{und} \quad 3a + b = 0 \,.$$

Somit ist

$$X(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-3z} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}-1}{2} z^k \,,$$

und diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z| < 1/3$. Also ist

$$a_k = \frac{3^{k+1}-1}{2} \,.$$

Für interessantere Beispiele sei auf die *Elektrotechnik II* verwiesen.

f) Der Fundamentalsatz der Algebra

Wie im vorigen Abschnitt angekündigt, wollen wir uns hier überlegen, daß jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle hat; tatsächlich kann es sogar als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz von Liouville: Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis: Konkret sei $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine Kreislinie γ vom Radius R um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist dann nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen aus dem letzten Abschnitt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+Re^{it})}{(Re^{it})^2} iRe^{it}\,dt \,,$$

also

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f(z+Re^{it})\right|}{R}\,dt \le \frac{M}{R} \,.$$

Da $f(z)$ auf ganz z holomorph ist, können wir den Radius R beliebig groß wählen, also muß $f'(z)$ überall verschwinden. Dann muß aber f selbst konstant sein. ■

JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) war Sohn eines Kapitäns aus NAPOLEONSs Armee. Er kam 1825 an die Ecole Polytechnique, wo er unter anderem Vorlesungen von AMPÈRE hörte. 1831 wurde er Assistent bei AMPÈRES Nachfolger MATHIEU; später lehrte er unter anderem am Collège de France und an der Ecole Polytechnique. Nach der 1848er Revolution war er (als gemäßigter Republikaner) kurz Mitglied der Nationalversammlung. Seine über 400 Arbeiten befassen sich unter anderem mit mit Zahlentheorie, Differentialgleichungen, Differentialoperatoren, Differentialgeometrie und Statistischer Mechanik und Astronomie.

Ein Polynom $f(z)$ ist natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; es ist allerdings nicht beschränkt. Wenn es aber keine Nullstellen hat, ist auch $1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und diese Funktion ist beschränkt: Für konstantes f ist das trivial, und für ein nichtkonstantes Polynom ist stets

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0\,.$$

Somit gibt es zu jeder positiven Zahl M_1 einen Radius $R > 0$, so daß $|1/f(z)| < M_1$ für $|z| > R$.

Die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ ist abschlossen und beschränkt, also muß dort die stetige Funktion $|1/f(z)|$ ihr Maximum M_2 annehmen, und für das Maximum M der beiden Werte M_1 und M_2 gilt

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \le M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $1/f(z)$ konstant, also auch $f(z)$ selbst. Damit folgt der

Fundamentalsatz der Algebra: *a)* Jedes nichtkonstante Polynom f mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.
b) Genauer läßt sich ein komplexes Polynom vom Grad n schreiben als

$$f(z) = a(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\cdots(z-z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n$.

Zum *Beweis* müssen wir nur noch *b)* betrachten; wir zeigen diese Aussage durch vollständige Induktion nach dem Grad von f.

Ein Polynom vom Grad null ist konstant, d.h. $f(z) = a$, und das ist bereits von der gewünschten Form. Auch die Summenformel gilt in diesem Fall trivialerweise.

Für $n > 0$ hat f mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Diese können wir abdividieren, d.h. wir dividieren das Polynom $f(z)$ mit Rest durch $z - z_0$:

$$f(z) : (z - z_0) = g(z) \;\text{ Rest } R(z)\,.$$

Dabei hat der Rest $R(z)$ kleineren Grad als der Divisor $(z - z_0)$, d.h. $R(z) = c$ ist ein konstantes Polynom. Somit ist

$$f(z) = (z - z_0)g(z) + R(z) = (z - z_0)g(z) + c$$

mit einer komplexen Zahl c. Speziell für $z = z_0$ erhalten wir die Beziehung

$$f(z_0) = c\,;$$

da z_0 eine Nullstelle von f ist, folgt $c = 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)g(z)\,.$$

Damit ist $g(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können:

$$g(z) = a(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\cdots(z-z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n - 1$ und

$$f(z) = a(z-z_0)(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\cdots(z-z_r)^{e_r}\,.$$

Unabhängig davon, ob z_0 gleich einem der anderen z_i ist oder nicht ist das eine Darstellung der verlangten Form, in der sich die Exponenten zu n ergänzen, und damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Aussage über die Summe der Exponenten kann auch so interpretiert werden, daß ein komplexes Polynom vom Grad n mit Vielfachheiten gerechnet genau n Nullstellen hat.

Für reelle Polynome folgt:

Korollar: Jedes reelle Polynom $f(x)$ läßt sich schreiben als Produkt

$$f(x) = a(x - x_1)^{e_1} \cdots (x - x_r)^{e_r} q_1^{d_1} \cdots q_s^{d_s}$$

mit reellen Zahlen a, x_ν und quadratischen reellen Polynomen q_μ, die keine reelle Nullstellen haben. Dabei ist

$$\deg f = \sum_{\nu=1^r} e_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^{s} d_\mu \, .$$

Beweis: Über den komplexen Zahlen zerfällt f in Linearfaktoren. Die Linearfaktoren zu reellen Nullstellen können einfach übernommen werden. Im Falle einer komplexen Nullstelle z_μ ist, da f reelle Koeffizienten hat, auch $\overline{z_\mu}$ eine Nullstelle derselben Vielfachheit, und

$$q_\mu = (z - z_\mu)(z - \overline{z_\mu}) = z^2 - (2\,\mathfrak{Re}\, z_\mu)z + |z_\mu|^2$$

ist ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten, aber ohne reelle Nullstelle. ■

g) Der Residuensatz

Der CAUCHYsche Integralsatz gilt nicht für meromorphe Funktionen: Wie wir oben gesehen haben, liefert bereits $f(z) = 1/z$ ein Gegenbeispiel. In gewisser Weise ist das aber bereits das *einzige* Gegenbeispiel: Für $n \geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n-1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ definiert, d.h.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^n} = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ, die nicht durch 0 geht. Falls daher eine Funktion im durch γ begrenzten Bereich G nur eine einzige Polstelle z_0 hat und der Hauptteil dort gleich

$$H(z) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

ist, können wir $f(z) = g(z) + H(z)$ zerlegen in diesen Hauptteil und eine in ganz G holomorphe Funktion $g(z)$. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz + \int_\gamma H(z)\,dz = \int_\gamma H(z)\,dz \, .$$

Dies läßt sich weiter ausrechnen als

$$\int_\gamma H(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i a_{-1} \, .$$

Von daher ist klar, daß der Koeffizient a_{-1} eine besondere Rolle spielt und einen eigenen Namen verdient:

Definition: *a)* Für eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit LAURENT-Reihe $\sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ um die Polstelle z_0 heißt der Koeffizient a_{-1} von $1/(z - z_0)$ das *Residuum* von f im Punkt z_0; in Zeichen

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f \, .$$

Demnach ist also in der obigen Situation

$$\int_\gamma f(z)\,dz == 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f \, .$$

Allgemein gilt der

Residuensatz: Die Funktion f sei meromorph in $D \subseteq \mathbb{C}$ und γ sei eine ganz in D liegende Kurve, die Rand eines beschränkten Gebiets G sei und auf der f keine Pole habe. Dann hat f in G nur endlich viele Polstellen $z_1, \ldots, z_r$, und

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_k} f \, .$$

Beweis: Der Abschluß $\overline{G}$ von G ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; daher hat jede unendliche Teilmenge von $\overline{G}$ (mindestens) einen Häufungspunkt. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion nach Definition keinen Häufungspunkt haben dürfen, kann es nur endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$ geben; die zugehörigen Hauptteile seien $H_1(z), \dots, H_r(z)$. Dann ist

$$g(z) \underset{\text{def}}{=} f(z) - H_1(z) - \cdots - H_r(z)$$

eine holomorphe Funktion, also ist nach dem CAUCHYschen Integralsatz

$$0 = \int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma f(z) - \sum_{k=1}^r \int_\gamma H_k(z)\,dz$$

oder

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^r \int_\gamma H_k(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_k} f\,,$$

genau wie oben im Fall einer einzigen Polstelle. ■

Der Residuensatz kann ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Berechnung von Integralen sein, da sich die Residuen im allgemeinen viel einfacher berechen lassen, als ein Kurvenintegral: Da das Residuum im Punkt z_0 der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$ ist, ist beispielsweise für einen Pol *erster* Ordnung das Residuum der konstante Term der TAYLOR-Reihe von $(z-z_0)f(z)$, also einfach

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)\,.$$

Bei Polen höherer Ordnung divergiert dieser Ausdruck; wir können aber beispielsweise bei einem Pol n-ter Ordnung zunächst den Koeffizienten a_{-n} berechnen als

$$a_{-n} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z)\,;$$

dann ist $f(z) - \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ eine meromorphe Funktion, die bei z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $n-1$ hat und deren LAURENT-Koeffizienten abgesehen von a_{-n} mit denen von f übereinstimmen.

Auf diese Weise läßt sich rekursiv der Hauptteil von f berechnen, was meist erheblich einfacher ist als die Auswertung der Integraldarstellungen der Koeffizienten.

Als erste Anwendung des Residuensatzes betrachten wir

$$\int_\gamma \frac{z^5+1}{z^4-1}\,dz \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto 2e^{it} \end{cases}.$$

Der Nenner hat die vier Nullstellen ± 1 und $\pm i$, die allesamt im Innern des Kreises mit Radius zwei um den Nullpunkt liegen, über den wir integrieren. $z = -1$ ist allerdings auch Nullstelle des Zählers, und

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^5+1}{z^4-1} = \lim_{z\to -1} \frac{5z^4}{4z^3} = \lim_{z\to -1} \frac{5z}{4} = -\frac{5}{4}$$

existiert in $\mathbb{C}$; Pole gibt es also nur für $+1$ und $\pm i$. Diese Pole haben allesamt Ordnung eins, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt. Also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_1 f &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z^5+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^5+1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{2}{2\cdot 2)} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Genauso bestimmt man

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z^5+1}{(z^2-1)(z+i)} \\ &= \frac{i^5+1}{(i^2-1)(i+i)} = \frac{i+1}{-4i} = \frac{-1+i}{4}\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-i} f = \frac{(-i)^5+1}{\big((-i)^2-1\big)(-i-i)} = \frac{1-i}{-2\cdot(-2i)} = \frac{-1-i}{4}\,.$$

Die Summe der drei Residuen ist null, also verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

Man beachte, daß wir dieses Ergebnis nicht ohne weiteres über eine Stammfunktion bekommen hätten, denn die Stammfunktion

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(z-1) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(z^2+1) - \frac{1}{2}\arctan z$$

ist gleich an mehreren Stellen des Integrationswegs unstetig: Für $z = -2$ überquert das Argument von $\mathrm{Ln}(z-1)$ die negative reelle Achse, und für $z = \pm 2i$ das von $\mathrm{Ln}(z^2+1)$.

Auch im Reellen lassen sich gelegentlich bestimmte Integrale am einfachsten über den Residuensatz berechnen. Betrachten wir etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x-1)$$

ist alles andere als angenehm.

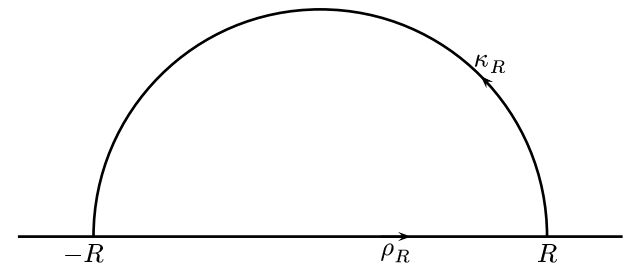
Alternativ betrachten wir für $R > 0$ einen Integrationsweg γ_R, der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R\colon \begin{cases} [-R,R] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto t \end{cases}$$

von $-R$ bis R und einem Halbkreis

$$\kappa_R\colon \begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebenen von $\mathbb{C}$, der von R im Gegenuhrzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve, und Polstellen des Integranden gibt es nur bei den primitiven achten Einheitwurzeln $e^{\pm\pi i/4}$ und $e^{\pm 3\pi i/4}$. Diese haben allesamt Betrag eins, und genau die beiden mit positivem Vorzeichen im Exponenten liegen in der oberen Halbebene. Nach dem Residuensatz ist also für $R > 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = \mathrm{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \mathrm{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\,,$$

wobei f den Integranden bezeichnet.

Die Residuen lassen sich wie oben bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1} \\
&= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{(z-e^{\pi i/4})(z+e^{\pi i/4})(z-e^{3\pi i/4})(z+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4}+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2}-2e^{3\pi i/2})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}\big(i-(-i)\big)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)}{4i} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)\,.
\end{aligned}$$

Genauso berechnet man $\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$, insgesamt ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (-2i) \cdot 2\pi i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

Was uns wirklich interessiert ist allerdings nicht das Integral über γ_R, sondern das über ρ_R; wir können es aus dem über γ_R berechnen, wenn wir das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kennen. Dieses Integral kennen wir zwar nicht, aber wir wissen, daß es für $R \to \infty$ gegen Null geht, denn

$$\int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4+1} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt\,,$$

und der Integrand rechts geht für $R \to \infty$ überall gegen Null, also auch das Integral über das endliche Intervall $[0,\pi]$. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4} - \lim_{R\to\infty} \int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

Ähnlich kann man bei anderen uneigentlichen Integralen vorgehen, vorausgesetzt der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse, die Residuen der Polstellen in der oberen Halbebene sind bekannt und das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kann zumindest für $R \to \infty$ bestimmt werden.

Genauso kann man natürlich mit der unteren Halbebene argumentieren; man muß dabei nur beachten, daß der geschlossene Integrationsweg dann *im Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, so daß der Wert des Integrals dann $-2\pi i$ mal der Residuensumme ist.

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen, beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Im Zusammenhang mit FOURIER-Transformationen werden wir noch einige weitere Beispiel für die Berechnung reeller und komplexer Integrale über den Residuensatz kennenlernen.

h) Harmonische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ist (stetige) Differenzierbarkeit im Komplexen eine erheblich stärkere Forderung ist als im Reellen. Die vielen schönen Eigenschaften einer holomorphen Funktion sollten ihre Auswirkungen auf deren Real- und Imaginärteil haben, reelle Funktionen, die als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden können, sollten also interessante analytische Eigenschaften haben. Beispielsweise ist eine holomorphe Funktion beliebig oft stetig differenzierbar; also gilt dies auch für ihren Real- und Imaginärteil.

Wenn die zweifach differenzierbare Funktion $u(x,y)$ Realteil einer holomorphen Funktion ist und $v(x,y)$ der zugehörige Imaginärteil, so ist nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)\,,$$

also folgt nach dem Lemma von SCHWARZ, daß

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) = v_{xy}(x,y) = -u_{yy}(x,y)\,,$$

d.h.

$$\Delta u(xy) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \equiv 0\,.$$

Der LAPLACE-Operator, angewandt auf den Realteil einer holomorphen Funktion, liefert also die Nullfunktion.

Die Gleichung $\Delta u = 0$ dürfte den meisten aus der Physik in Erinnerung sein: Ist u ein elektrisches Potential und $\vec{E} = \nabla u$ das zugehörige elektrische Feld, so ist $\Delta u = \operatorname{div} E$, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* $\Delta u = 0$ besagt also, daß ∇u ein quellenfreies Feld ist; es gibt also keine Ladungen.

Solche Funktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle, sondern beispielsweise auch bei der Wärmeleitung und einer ganze Reihe weiterer Anwendungen; sie haben daher einen eigenen Namen verdient (und eine umfangreiche Theorie, die sich mit ihren Eigenschaften beschäftigt).

Definition: Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn dort überall gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \,.$$

Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit holomorphen Funktionen zusammen:

Lemma: *a)* Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
b) Zu jeder harmonischen Funktion $u: D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es für jeden Punkt $(a, b) \in D$ eine Umgebung U und eine auf U holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$, so daß u auf U der Realteil von f ist.

Beweis: a) Wir haben bereits nachgerechnet, daß der Realteil einer holomorphen Funktion f harmonisch ist; da mit f auch $-if$ holomorph ist und den Imaginärteil von f als Realteil hat, gilt dasselbe für den Imaginärteil.

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -u_y(x, y) \\ u_x(x, y) \end{pmatrix}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq D$, die den Punkt (a, b) enthält, z.B. eine Kreisscheibe um (a, b), die noch ganz in D liegt. Da

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

auf U identisch verschwindet, hat das Vektorfeld $\vec{V}$ nach dem zweidimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Kap. II, §6*f)*, eine Stammfunktion; es gibt also eine Funktion $v: U \to \mathbb{R}$ mit

$$v_x = V_1 = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = V_2 = u_x \,.$$

Damit erfüllt das Paar (u, v) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; und da die Ableitungen der zweimal stetig differenzierbaren Funktion u natürlich stetig ist, ist

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph auf U mit u als Realteil. ■

Als Beispiel, wie Sätze über holomorphe Funktionen auf harmonische Funktionen zweier Veränderlicher übertragen werden können, sei hier nur die Mittelwerteigenschaft erwähnt:

Satz: $u(x, y)$ sei harmonisch auf einem Gebiet G, das die offene Kreisscheibe D vom Radius r um (x_0, y_0) enthalte. Dann ist

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, dt$$

der Mittelwert der auf der Kreislinie angenommenen Werte.

Beweis: Wie wir bereits wissen, gibt es eine holomorphe Funktion f, die u als Realteil hat. Mit $z = x + iy$ kann die CAUCHYsche Integralformel kann als eine Mittelwertaussage für f interpretiert werden: Für den Integrationsweg

$$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto z_0 + re^{it}$$

ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{z - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \frac{f(w + re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it}\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{it})\, dt$$

gleich dem Mittelwert der Funktion $f(z_0 + re^{it})e^{it}$ über die Kreislinie. Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, folgt die Behauptung. ■