Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2002/2003

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Tutor. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

Kapitel 3

Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Jedes Musikinstrument hat seinen eigenen unverwechselbaren Klang; selbst der Unmusikalischste kann leicht hören, ob eine Melodie von einer Geige, einer Flöte, einem Klavier oder einer Trompete gespielt wurde. Der wichtigste Grund dafür dürfte wohl allgemein bekannt sein: Verschiedene Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns diese Verhältnisse quantitativ nicht bewußt sind.

Genau wie unser Ohr reagieren auch elektrische Schaltungen in unterschiedlicher Weise auf verschiedene Frequenzen: Legt man beispielsweise an eine Spule mit OHMschem Widerstand R und Induktivität L eine Gleichspannung U_0, so fließt ein Strom der Stärke I_0, für den nach dem OHMschen Gesetz gilt: $U_0 = RI_0$. Ersetzt man aber die Gleichspannung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω, so gilt für die Amplitude I_0 des dann fließenden Wechselstroms $U_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_0$.

Ersetzt man die Spule durch einen Kondensator mit Kapazität C und Widerstand (der Zuleitungen) R, so fließt beim Anlegen einer Gleichspannung natürlich überhaupt kein Strom: Der Kondensator lädt sich einfach auf. Legt man aber eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω an, fließt ein Strom der Amplitude

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} .$$

Im nächsten Kapitel werden wir mit Hilfe von Differentialgleichungen unter anderem untersuchen, was in komplizierteren Wechselstromkreisen gilt; für den Augenblick soll uns nur interessieren, daß das Verhalten einer jeden Schaltung stark von der Frequenz des angelegten Wechselstroms abhängt und daß dieses Verhalten mathematisch berechenbar ist.

Wechselstromkreise haben zwar mehr mit Technischer Informatik zu tun als Geigen und Trompeten; sie gehören aber doch eher zum Arbeitsgebiet eines Elektroinstallateurs als zu dem eines Informatikers. In einem Computer fließen zwar Ströme, aber mit reinen Wechselströmen kann man fast genauso wenig anfangen wie mit einem Computer, in dem überall ein konstanter Gleichstrom fließt: Elektronische Informationsverarbeitung lebt von schnell und unregelmäßig variierenden Strömen. Diese fließen allerdings durch genau die Schaltungen, von denen wir gerade gesehen haben, daß ihr Verhalten stark von der Frequenz abhängt.

Um auch solche Situationen berechenbar zu machen, müssen wir einen beliebigen Stromverlauf in eine *Summe reiner Wechselströme* zerlegen, so wie man auch den Ton eines Musikinstruments in seine Grundschwingung und die Oberschwingungen zerlegen kann. Wir werden in diesem Kapitel sehen, daß man jede (halbwegs vernünftige) *periodische* Funktion beliebig genau durch Summen reiner Schwingungen annähern kann, und wenn wir für jeden Summanden wissen, was eine gegebene elektrische Schaltung damit macht, kennen wir auch ihr Verhalten gegenüber der Summe – zumindest solange alle Schaltelemente linear sind.

Für nichtperiodische Funktionen werden wir sehen, daß hier zwar keine Zerlegung in diskrete Grund- und Oberschwingungen mehr möglich ist, daß es hier aber ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* gibt, mit dem man genauso arbeiten kann, wenn man die Beiträge der einzelnen Frequenzen nicht mehr summiert, sondern aufintegriert.

Reine Schwingungen lassen sich beschreiben durch Sinus- und Cosinusfunktionen. Da nur wenige Enthusiasten den Umgang mit den Additions- und sonstigen Formeln für diese Funktionen lieben, erinnert man sich aber auch gerne an die EULERschen Formeln, wonach $\cos t = \mathfrak{Re}\, e^{it}$ und $\sin t = \mathfrak{Im}\, e^{it}$ durch die komplexe Exponentialfunktion ausgedrückt werden können, und rechnet mit *komplexen* Strömen $I_0 e^{i\omega t}$ und Spannungen $U_0 e^{i\omega t}$.

Physikalisch sinnvoll ist ein Strom von $3i\, mA$ natürlich genausowenig wie eine Spannung von $(2-5i)\, V$; die komplexe Schreibweise ist nur ein Kalkül, der das praktische Rechnen vereinfachen soll mit der Interpretation, daß die tatsächlich interessierende Größe beispielsweise der Imaginärteil der komplexen Funktion sein soll. (Man könnte auch den Realteil nehmen; dann müßte aber bei einigen Gesetzen ein anderes Vorzeichen stehen.)

Mathematisch ist das problemlos, solange man nur Operationen anwendet, die mit der Bildung des Imaginärteils vertauschbar sind, also beispielsweise reelle Linearkombinationen von Strömen und Spannungen. Betrachtet man dagegen Produkte, etwa um eine Leistung zu berechnen, läßt sich diese natürlich nicht als Imaginärteil des Produkts

$$U_0 e^{i\omega t} \cdot I_0 e^{i\omega t} = U_0 I_0 e^{2i\omega t} = U_0 I_0 (\cos 2\omega t + i \sin 2\omega t)$$

berechnen, denn der Imaginärteil eines Produkt komplexer Zahlen ist nicht gleich dem Produkt der Imaginärteile.

Dafür hat der Kalkül aber einen großen Vorteil gegenüber der offensichtlicheren reellen Beschreibung: Geht ein variabler Strom durch eine Spule der Induktivität L, so wird die Spannung $U(t) = L\dot{I}(t)$ induziert. In reeller Beschreibung ist also bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin \omega t$

$$U(t) = L\omega \cos \omega t\,.$$

Beim komplexen Ansatz $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist dagegen

$$\begin{aligned} U(t) &= L I_0 \big(-\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t\big) \\ &= i\omega L I_0 \big(\cos \omega t + i \sin \omega t\big) = i\omega L \cdot I(t)\,, \end{aligned}$$

was als Imaginärteil natürlich genau den gerade berechneten reellen Ausdruck hat.

Die Formel für $U(t)$ ist aber in der komplexen Form deutlich einfacher: Während man im Reellen den Sinus durch einen Cosinus ersetzen muß, wird im Komplexen einfach mit $i\omega L$ multipliziert; der variable Bestandteil $e^{i\omega t}$ bleibt gleich und kann daher beim praktischen Rechnen global ausgeklammert und somit ignoriert werden.

Ähnlich ist es bei Kondensatoren: Hier ist für Kapazität C und Ladung $Q(t)$ für $I(t) = \dot{Q}(t) = I_0 e^{i\omega t}$

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I(t)\, dt = \frac{1}{i\omega C} \cdot I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I(t)\,.$$

Rein formal kann man also im komplexen Kalkül Induktivitäten und Kapazitäten als rein imaginäre OHMsche Widerstände hinschreiben und damit rechnen, wie man es von Gleichstromnetzen aus reinen Widerständen gewohnt ist. Zusammen mit den auch in Wechselstromnetzen allgegenwärtigen OHMsche Widerständen, für die das klassische OHMsche Gesetz gilt, hat man insgesamt formal einen komplexen Widerstand, die sogenannte *Impedanz.*

Auch die eingangs erwähnten Formeln für die Spannungsamplituden in einem RL- bzw. RC-Kreis lassen sich durch komplexe Zeigerrechnung leicht erklären: Im RL-Kreis ist die Impedanz gleich $R + i\omega L$; bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist die Spannung also in komplexer Darstellung $U(t) = (R + i\omega L) \cdot I_0 e^{i\omega t}$. Da e^{ix} für reelles x stets Betrag eins hat, ist der Betrag von $U(t)$ gleich dem der komplexen Zahl $(R + i\omega L) I_0$, also $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0$.

Warum ist dieser Betrag gleich der Amplitude des Imaginärteils? Für die Funktion $Ae^{i\omega t}$ mit komplexem A (hier ist $A = (R + i\omega L) \cdot I_0$), können wir A auch in Polarkoordinaten schreiben als $A = |A| \cdot e^{i\psi_0}$. Dann ist

$$Ae^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t + \psi)} = |A| \cdot \big(\cos(\omega t + \psi) + i \sin(\omega t + \psi)\big)\,,$$

der Imaginärteil hat also in der Tat Amplitude $|A|$. Bei reeller Rechnung kämen wir zwar zum selben Ergebnis, aber wir müßten in diesem Fall die Amplitude der Funktion

$$\omega L I_0 \cos \omega t + R I_0 \sin \omega t$$

berechnen. Dazu müssen wir diesen Ausdruck auf die Form

$$A_0 \sin(\omega t + \psi) = A_0 \sin\psi \, \cos\omega t + A_0 \cos\psi \, \sin\omega t$$

bringen, d.h. wir müssen eine Phasenverschiebung ψ und eine Amplitude A_0 finden, so daß

$$\omega L I_0 = A_0 \sin\psi \quad \text{und} \quad R I_0 = A_0 \cos\psi$$

ist. Wegen der Beziehung $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$ ist natürlich auch hier

$$A_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0 ,$$

aber man erhält dieses Ergebnis auf deutlich umständlichere Weise.

Wenn man mit diesen Impedanzen rechnet, kann man Wechselstromnetzwerke aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren, in denen ein Strom konstanter Frequenz fließt, genauso behandeln, wie man es von Gleichstromnetzen gewohnt ist. Wegen ihrer Einfachheit hat sich diese sogenannte *komplexe Zeigerrechnung* allgemein durchgesetzt; der Vorteil ihrer Einfachheit wiegt den Nachteil des zunächst etwas unanschaulichen Ansatzes mehr als auf, und im übrigen gewöhnt man sich nach etwas praktischer Übung auch sehr schnell daran.

Auch in der Wellenoptik erweist es sich oft als große Vereinfachung und Arbeitsersparnis, wenn man mit komplexen Schwingungen rechnet. Wir werden daher in diesem Kapitel nicht nur reelle, sondern auch komplexe Funktionen betrachten. Da wir viel differenzieren und integrieren müssen, wollen uns zunächst überlegen, was diese Operationen im Komplexen bedeuten und welche Gesetze dafür gelten.

Wer immer noch Probleme darin sieht, mit komplexen Größen zu rechnen, die keinerlei physikalische Realität haben, sollte sich daran erinnern, daß auch die reellen Zahlen eine mathematische Konstruktion ohne Entsprechung in der Realität sind. Die Erfahrung in Naturwissenschaften, Ingenieurswissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften haben gezeigt, daß die reellen Zahlen dort außerordentlich nützlich sein können, einen logischen Grund dafür gibt es aber nicht. Der Physik-Nobelpreisträger EUGENE WIGNER (1902–1995) bezeichnete dies im Titel einer seiner Arbeiten als „The unreasobable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ *(Communications in pure and applied mathematics* **13** (1960), *1–14; zahlreiche Nachdrucke im WWW).* Wirklich zum Tragen kommt diese schwer erklärbare Nützlichkeit der Mathematik allerdings nur in den Händen eines Anwenders, der sowohl ihre Möglichkeiten als auch ihre Grenzen für seinen jeweiligen Problembereich kennt.

§ 1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Um möglichst schnell zu Ergebnissen zu kommen, identifizieren wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$, indem wir den Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ (meist stillschweigend) mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Eine Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht damit einem Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dafür können wir die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel anwenden, allerdings liefern uns diese noch nicht alles, was wir brauchen: Die Ableitung $f'(z)$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ soll natürlich eine komplexe Zahl sein; die Ableitung eines Vektorfelds aber ist die JACOBI-Matrix. In der Tat wird sich herausstellen, daß die komplexe Differenzierbarkeit von f eine sehr viel einschneidendere Forderung ist als die Differenzierbarkeit des entsprechenden Vektorfelds; sie hat es daher verdient, daß wir dafür auch ein neues Wort einführen:

a) Holomorphe Funktionen

Die Definition ist die altvertraute:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert und stetig ist. f heißt *komplex differenzierbar in* D, wenn f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph* in D, wenn zusätzlich $f'\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt darin, daß h hier eine *komplexe* Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und auf jedem beliebigen Weg (für den $z+h$ noch in D liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich h ganz auf der reellen *bzw.* der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit zwei Funktionen $u, v\colon D \to \mathbb{R}$. (Hier wird D also als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt.)

Für *reelles* h ist dann

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\,;$$

der Grenzwert für h gegen Null, so er existiert, ist damit gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,.$$

Für rein *imaginäres* $h = ik$ ist entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{ik} + i\,\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{ik}\\ &= \frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k} - \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}\,;\end{aligned}$$

der Grenzwert für h (oder k) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,.$$

Falls f komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad\text{und}\quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

oder kurz

$$u_x = v_y \quad\text{und}\quad v_x = -u_y\,.$$

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen; sie sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.

Weniger offensichtlich ist, daß diese Bedingung sogar *hinreichend* ist. Um das einzusehen, fassen wir $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum auf und betrachten für jede komplexe Zahl $c = a + ib$ die lineare Abbildung

$$\varphi_c\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto cz \end{cases}.$$

Da sie 1 auf $a+ib$ und i auf $-b+ia$ abbildet, hat sie bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ die Abbildungsmatrix

$$M_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

und umgekehrt entspricht jede lineare Abbildung mit einer Matrix dieser Form der Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Betrachten wir nun die komplexe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ als Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so ist

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix},$$

und für dieses Vektorfeld gilt, sofern es differenzierbar ist,

$$f(x+k, y+\ell) = f(x,y) + J_f(x,y)\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right)$$

mit der JACOBI-Matrix

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann von obiger Gestalt, wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad\text{und}\quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

erfüllt sind; in diesem Fall gilt für die komplexe Zahl

$$w = u_x(x,y) + iu_y(x,y) = v_y(x,y) - iv_x(x,y)\,,$$

daß $J_f(x,y)\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ als komplexe Zahl aufgefaßt gleich $w \cdot (k + i\ell)$ ist.

Alsdann läßt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u(x+k, y+\ell) \\ v(x+k, y+\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + J_f(x,y)\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|\right)$$

mit $h = k + i\ell$ auch komplex schreiben als

$$f(z+h) = f(z) + wh + o(h)\,,$$

denn der Betrag der komplexen Zahl $h = k + i\ell$ ist gleich $\sqrt{k^2+\ell^2}$ und damit gleich der Länge des Vektors $\binom{k}{\ell}$. Wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, ist f daher im Punkt z komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = w$.

Damit haben wir gezeigt

Satz: Die Funktion $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ ist genau dann komplex differenzierbar im Punkt $x+iy$, wenn dort die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

gelten. ■

b) Beispiele holomorpher Funktionen

Um ein Gefühl für Holomorphie zu bekommen, wollen uns überlegen, welche der gängigen Funktionen holomorph sind und welche nicht.

Mit am einfachsten sind die Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$. Diese lassen sich allerdings nur umständlich in Realteil und Imaginärteil zerlegen – was im übrigen auch der Grund ist, warum eine Formel wie $e^{10it} = \left(e^{it}\right)^{10}$ soviel einfacher ist als

$$\cos 10t = 512\cos^{10} t - 1280\cos^8 t + 1120\cos^6 t - 400\cos^4 t + 50\cos^2 t - 1$$

und warum komplexe Funktionen für uns attraktiv sind.

Zumindest in diesem Fall ist es daher einfacher, die komplexe Differenzierbarkeit direkt nachzurechnen; die Rechnung ist identisch mit der aus Schule und Analysis I bekannten Rechnung im Reellen: Für beliebige Zahlen $z, h \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned}(z+h)^n + z^n &= z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2}h^2z^{n-2} + \cdots + h^n - z^n \\ &= h\left(nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\right)\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\,.$$

Läßt man rechts h gegen Null gehen, verschwinden alle Terme außer dem ersten, d.h. auch im Komplexen ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1}\,,$$

und da dies eine stetige Funktion ist, sind zumindesten Potenzen holomorph. Damit definieren auch alle komplexen Polynome holomorphe Funktionen und haben ihre gewohnten Ableitungen, denn auch im Komplexen ist Differentiation eine lineare Operation.

Die nächste extrem wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Auch hier könnten wir direkt rechnen, wollen aber zur Abwechslung die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen anwenden: Nach den EULERschen Formeln ist

$$e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y\,,$$

für $f(z) = e^z$ ist also $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit

$$u(x,y) = e^x\cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x\sin y\,.$$

Damit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = e^x\cos y \;\text{ und }\; v_x(x,y) = -u_y(x,y) = e^x\sin y\,,$$

die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind also erfüllt. Die Ableitung kann z.B. über die Differenzenquotienten mit reellem h berechnet werden; für $z = x + iy$ ist

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^xe^{iy} = e^z\,,$$

wie gewohnt. Insbesondere ist die Ableitung stetig, die Exponentialfunktion also holomorph.

Auch die Ableitung von $f(z) = e^{\omega z}$ für $\omega = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ bringt keine Überaschungen:

$$f(x+iy) = e^{(\lambda+i\mu)(x+iy)} = e^{\lambda x - \mu y}e^{i(\lambda y + \mu x)} = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit

$$u(x,y) = e^{\lambda x-\mu y}\cos(\lambda y+\mu x) \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^{\lambda x-\mu y}\sin(\lambda y+\mu x)\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x-\mu y}\cos(\lambda y+\mu x) - \mu e^{\lambda x-\mu y}\sin(\lambda y+\mu x) \\ &= e^{\lambda x-\mu y}\big(\lambda\cos(\lambda y+\mu x) - \mu\sin(\lambda y+\mu x)\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_x(x,y) = -u_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x-\mu y}\sin(\lambda y+\mu x) + \mu e^{\lambda x-\mu y}\cos(\lambda y+\mu x) \\ &= e^{\lambda x-\mu y}\big((\lambda\sin(\lambda y+\mu x) + \mu\cos(\lambda y+\mu x)\big)\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch hier das erwartete Ergebnis

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= e^{\lambda x-\mu y}\big((\lambda+i\mu)\cos(\lambda y+\mu x) + (-\mu+i\lambda)\sin(\lambda y+\mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x-\mu y}\big((\lambda+i\mu)\cos(\lambda y+\mu x) + i(\lambda+i\mu)\sin(\lambda y+\mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x-\mu y}(\mu+i\lambda)\big(\cos(\lambda y+\mu x) + i\sin(\lambda y+\mu x)\big) \\ &= \omega e^{\lambda x-\mu y}e^{i(\lambda y+\mu x)} = \omega e^{\omega z}\,. \end{aligned}$$

Wenn wir die EULERschen Formeln

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

als Definition für komplexwertige trigonometrische Funktionen nehmen, folgt aus der Linearität der Ableitung, daß auch diese Funktionen holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz}\cos\omega z = -\omega\sin\omega z \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz}\sin\omega z = \omega\cos\omega z\,.$$

Schließlich gilt auch die Produktregel genau wie im Reellen: Sind $f,g\colon D\to\mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, so ist für $z, z+h\in D$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(z+h)-(fg)(z)}{h} &= \frac{f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)}{h} \\ &= \frac{f(z+h)\big(g(z+h)-g(z)\big) + \big(f(z+h)-f(z)\big)g(z)}{h} \\ &= f(z+h)\,\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,g(z)\,, \end{aligned}$$

was für $h\to 0$ gegen $f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$ konvergiert. Damit ist auch das Produkt zweier holomorpher Funktionen holomorph, und wie im Reellen gilt die LEIBNIZ-Regel

$$(fg)' = fg' + f'g\,.$$

Auch die zweite wichtige Differentiationsregel, die Kettenregel, folgt genau wie im Reellen: Für eine holomorphe Funktion $f\colon U\to\mathbb{C}$ und eine weitere holomorphe Funktion $g\colon D\to U$ mit $U\subseteq\mathbb{C}$ offen ist zunächst wegen der Holomorphie von g für alle $z\in D$

$$g(z+h) = g(z) + hg'(z) + o(h)\,,$$

also folgt aus der Holomorphie von f, daß

$$f\big(g(z+h)\big) = f\big(g(z)+hg'(z)+o(h)\big) = f\big(g(z)\big) + hg'(z)f'\big(g(z)\big) + o(h)$$

ist, und

$$\frac{f\big(g(z+h)\big) - f\big(g(z)\big)}{h} = g'(z)f'\big(g(z)\big) + \frac{o(h)}{h}$$

konvergiert für $h\to 0$ gegen $g'(z)f'\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)$. Also ist auch $f\big(g(z)\big)$ eine holomorphe Funktion, und wie im Reellen ist

$$\frac{d}{dz}f\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)\,.$$

Um zu sehen, daß es auch keine Probleme mit von Null verschiedenen Quotienten gibt, müssen wir daher nur noch die eine Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C} \\ \qquad z\mapsto \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

also

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Somit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

also

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{\big((x+iy)(x-iy)\big)^2} = \frac{-1}{(x+iy)^2} = \frac{-1}{z^2}\,.$$

Insbesondere wissen wir damit, daß alle Funktionen holomorph sind, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführung aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt werden können – sofern bei den Divisionen keine Nullen im Nenner auftauchen. Beispielsweise ist also

$$f(z) = \sin z \cdot e^{2z^2 + \cos z}$$

eine holomorphe Funktion, und ihre Ableitung kann genau wie im Reellen berechnet werden als

$$f'(z) = (4z \sin z - \sin^2 z + \cos z)e^{2z^2+\cos z}\,.$$

Eine bislang noch nicht betrachtete einfache Funktion ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$. Hier ist

$$f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$$

stets reell, also $u(x,y) = f(x+iy)$ und $v(x,y) \equiv 0$. Da

$$u_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

im Nullpunkt undefiniert und überall sonst ungleich Null sind, sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen nirgends erfüllt; im Komplexen ist also die Betragsfunktion *nirgends* komplex differenzierbar oder gar holomorph.

Dasselbe gilt auch für die komplexe Konjugation $f(z) = \overline{z}$, denn hier ist

$$f(x+iy) = x - iy, \quad \text{d.h. } u(x,y) = x \text{ und } v(x,y) = -y\,,$$

so daß überall

$$u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$$

ist. In diesem Beispiel ist das entsprechende Vektorfeld

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

überall differenzierbar mit konstanter JACOBI-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, aber da die beiden Diagonalelemente dieser Matrix verschieden sind, entspricht sie keiner komplexen Zahl.

Für $f(z) = \mathfrak{Re}\, z$ schließlich ist $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv 0$, für $f(z) = \mathfrak{Im}\, z$ umgekehrt $u_x \equiv 0$ und $v_y \equiv 1$; auch diese beiden Funktionen sind also nirgends komplex differenzierbar, obwohl die entsprechenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ überall beliebig oft differenzierbar sind.

c) Der Cauchysche Integralsatz

Wenn wir eine reelle Funktion einer Veränderlichen zwischen $x = a$ und $y = b$ integrieren wollen, gibt es nur eine Möglichkeit, von a nach b zu gehen: Wir befinden uns schließlich auf einer Geraden. Die komplexen Zahlen dagegen bilden eine Ebene, und dort gibt es viele Möglichkeiten, um von einem gegebenen Punkt zu einem anderen zu kommen. Integrale komplexwertiger Funktionen sind daher stets *Kurvenintegrale.*

Das Integral der komplexen Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{C}; \quad z = x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

längs eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kann in völliger Analogie zum RIEMANN-Integral definiert werden: Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und betrachten dazu die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

für geeignete Zwischenwerte

$$t_{\nu-1} \le \tau_\nu \le t_\nu\,;$$

das Integral ist der Grenzwert, so er existiert, für immer feinere Unterteilungen.

Es wäre kein Problem, dies im einzelnen auszuführen und so zu einer Definition des Integrals zu kommen, es geht allerdings schneller, wenn wir mit bekannten reellen Integralen arbeiten:

Falls der Integrationsweg γ einfach gleich seinem Definitionsintervall sein sollte, γ also die identische Abbildung ist, haben wir sowohl für den Realteil als auch den Imaginärteil von f gewöhnliche RIEMANN-Summen; wenn die Folge dieser Summen überhaupt konvergiert, dann also gegen eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil die Integrale über Real- und Imaginärteil von f sind:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(t)\,dt \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases} .$$

Damit kennen wir Integrale über reelle Integrationswege. Für beliebige Kurvenstücke γ konvergiert die Folge der Summen

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

bei immer weiterer Verfeinerung, falls überhaupt offensichtlich gegen das komplexe Integral

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt$$

mit reellem Integrationsweg, wir können also das Integral einfach über diese Formel definieren:

Definition: *a)* Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt\,,$$

sofern die (komponentenweise zu berechnende) rechte Seite existiert.
b) Das Integral über eine Kurve γ ist gleich der Summe der Integrale über die Kurvenstücke γ_ν, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Wir wollen dies weiter ausrechnen und auf bekannte Integrale über reelle Vektorfelder zurückführen. Dazu schreiben wir

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

mit $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und identifizieren $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit dem reellen Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) + iv\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\Big)\big(\dot\alpha(t) + i\dot\beta(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) - v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\,dt \\
&\qquad + i\Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t) + v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ -v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&\qquad + i\int_a^b \begin{pmatrix} v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix} ds\,,
\end{aligned}$$

wobei wir γ in der letzten Zeile mit dem Kurvenstück $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert haben.

Mit dieser reellen Interpretation komplexer Integrale können wir nun (mit einer kleinen Einschränkung) sofort *den* zentralen Satz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen beweisen:

Cauchyscher Integralsatz: $f: D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds\,.$$

Wir berechnen die rechts stehenden Integrale nach dem Satz von GREEN aus Kap. II, §6*f):*

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

In beiden Fällen verschwindet rechts der Integrand nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Also verschwinden die rechtsstehenden Integrale, und damit folgt die Behauptung. ■

Tatsächlich gilt der CAUCHYsche Integralsatz sogar für komplex differenzierbare Funktionen, d.h. die Stetigkeit der Ableitung ist nicht notwendig. Sie ist allerdings notwendig für den Satz von GREEN, auf den auch CAUCHY 1825 seinen Satz zurückführte. Die Verallgemeinerung auf komplex differenzierbare Funktionen wurde erstmalig 1900 von dem französischen Mathematiker EDOUARD GOURSAT (1858–1936) bewiesen. Sein Beweis, wie auch andere zwischenzeitlich gefundene Beweise, arbeiten direkt mit komplexen Funktionen und setzen keinen der reellen Integralsätze voraus; sie wären daher für uns deutlich aufwendiger als CAUCHYs Beweis. Für praktische Anwengungen wird der obige Satz wohl meist ausreichen; die Verallgemeinerung führt allerdings zu

einem erheblich besseren theoretischen Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit: Insbesondere kann man damit zeigen, daß Holomorphie und komplexe Differenzierbarkeit tatsächlich dasselbe sind.

Aus dem CAUCHYschen Integralsatz folgt auch, daß Integrale über eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nicht vom Integrationsweg abhängen, sondern nur von dessen Endpunkten: Sind nämlich γ_1 und γ_2 zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so bildet γ_1 zusammen mit der rückwärts durchlaufenen Kurve γ_2 eine geschlossene Kurve γ, auf die der CAUCHYsche Integralsatz anwendbar sein sollte. Etwas problematisch ist dabei nur die Bedingung, daß γ Randkurve einer offenen Menge sein soll. Für konkrete Kurven ist das selten ein Problem, auch wenn man (falls sich γ_1 und γ_2 schneiden) meist mit mehreren geschlossenen Kurven argumentieren muß. Der allgemeine Fall ist mathematisch etwas aufwendiger und braucht insbesondere auch den JORDANschen Kurvensatz; auf Einzelheiten sei daher hier verzichtet.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß auch im Komplexen ein Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt, nämlich

Satz: Zur Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ gebe es eine komplex differenzierbare Funktion $F: D \to \mathbb{C}$, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Weiter sei γ eine in D liegende Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Zum *Beweis* genügt es, ein Kurven*stück* $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ zu betrachten. Wir schreiben

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{und} \quad F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)\,;$$

da F holomorph ist, folgt

$$u(x,y) = U_x(x,y) = V_y(x,y) \quad \text{und} \quad v(x,y) = -U_y(x,y) = V_x(x,y)\,.$$

Damit ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds\,.$$

Nun erinnern wir uns an die Definition eines reellen Linienintegrals: Ein Vektorfeld wird integriert, indem man es in jedem Punkt von γ mit dem dortigen Tangentenvektor skalar multipliziert und dieses Produkt über $[a,b]$ integriert. Schreiben wir $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so ist der Tangentenvektor gleich $\binom{\dot\alpha(t)}{\dot\beta(t)}$, also

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(U_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + U_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\, dt$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(V_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + V_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\, dt\,.$$

Die rechtsstehenden Integranden sind nach der Kettenregel gleich

$$\frac{d}{dt}U\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \quad\text{und}\quad \frac{d}{dt}V\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,,$$

die Integrale also nach dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich

$$U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) \quad\text{und}\quad V\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - V\big(\alpha(a),\beta(a)\big)\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \Big(U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) + iV\big(\alpha(b),\beta(b)\big)\Big)\\ &\qquad - \Big(U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) + iV\big(\alpha(a),\beta(a)\big)\Big)\\ &= F\big(\alpha(b)+i\beta(b)\big) - F\big(\alpha(a)+i\beta(a)\big) = F(z_2) - F(z_1)\,,\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

d) Die Cauchysche Integralformel

Beim Beweis des CAUCHYschen Integralsatzes mußten wir die Holomorphie von D im gesamten Bereich D voraussetzen; nur so waren die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von GREEN gegeben. Tatsächlich liegt es nicht nur an der Beweismethodik, daß wir diese

Voraussetzung brauchen, sondern der Satz kann definitiv falsch werden, wenn die Funktion auch nur in *einem* Punkt des Kurveninneren G undefiniert ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Einheitskreis

$$\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{-it}$$

und fragen nach dem Integral

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Nach dem Satz vom Ende des letzten Abschnitts können wir so ein Integral auch berechnen, wenn wir eine Stammfunktion von f kennen; für $f(z) = 1/z$ sollte das der natürliche Logarithmus sein.

Da wir bereits gesehen haben, daß die klassischen Regeln der Differentialrechnung im Komplexen genauso aussehen wie im Reellen, gilt insbesondere auch der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion; eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion hat also die Ableitung $1/z$.

Im Reellen ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, also insbesondere injektiv, und damit ist klar, daß es genau eine Umkehrfunktion gibt, eben den natürlichen Logarithmus.

Im Komplexen ist die Exponentialfunktion allerdings nicht mehr injektiv: Auf Grund der Beziehung $e^{2\pi i} = 1$ ist $e^z = e^{z+2k\pi i}$ für jede ganze Zahl k. Das ist allerdings auch alles was passieren kann, denn ist $e^{z_1} = e^{z_2}$, so ist $e^{z_1-z_2} = 1$, und aus $e^{x+iy} = 1$ folgt zunächst, daß $e^x = \left|e^{x+iy}\right| = 1$ sein muß, also $x = 0$. Damit muß auch $e^{iy} = \cos y + i\sin y = 1$ sein, also $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, was genau für die ganzzahligen Vielfachen von 2π gilt. Also muß $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ sein für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$.

Damit ist die komplexe Exponentialfunktion injektiv beispielsweise auf der Menge

$$W = \big\{ z = x+iy \in \mathbb{C} \,\big|\, -\pi < y \le \pi \big\}\,.$$

Wir wollen uns überlegen, daß sie diese Menge bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet: Eine Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ läßt sich schreiben als $w = re^{i\varphi}$ mit einer reellen Zahl $r = |w| > 0$ und einem Winkel φ mit $-\pi < \varphi < \pi$. Zu r gibt es eine reelle Zahl x mit $e^x = r$, nämlich $x = \ln r$, und damit ist $e^{x+i\varphi} = w$.

Definition: Der Hauptwert $\operatorname{Ln} z$ des natürlichen Logarithmus der Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w \in W$ mit $e^w = z$.

Der so definierte Logarithmus ist aber leider nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn für eine negative reelle Zahl x ist $\operatorname{Ln} x = \ln|x| + \pi i$, für benachbarte Zahlen der Form $x - i\varepsilon$ mit kleinem $\varepsilon > 0$ liegt $\operatorname{Ln}(x - i\varepsilon)$ aber in der Nähe von $\ln|x| - \pi i$. Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus ist also unstetig auf der negativen reellen Achse; überquert man diese, springt er um $2\pi i$.

Der obige Satz ist nur anwendbar, wenn wir eine auf dem ganzen Integrationsweg holomorphe Stammfunktion haben; da der Einheitskreis aber die negative reelle Achse schneidet, ist das hier nicht der Fall. Der Satz wird aber anwendbar, wenn wir den Integrationsweg ein bißchen verkürzen: Das Kurvenstück

$$\gamma_\varepsilon\colon [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{it}$$

schneidet die negative reelle Achse nirgends, und da der Hauptwert des natürlichen Logarithmus überall außer im Nullpunkt und auf dieser Achse holomorph ist, folgt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} e^{i(\pi-\varepsilon)} - \operatorname{Ln} e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon)\,.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert dies gegen $2\pi i$, d.h.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0\,.$$

Somit reicht also schon ein einziger Punkt von G, in dem $f(z)$ nicht definiert ist, um den CAUCHYschen Integralsatz nicht mehr anwendbar zu machen.

Dieses Beispiel läßt sich noch stark verallgemeinern: Zunächst können wir anstelle des Einheitskreises auch jeden anderen Kreis um den Nullpunkt betrachten, denn da für $-\pi < t \le \pi$ und $r > 0$

$$\operatorname{Ln}\left(re^{it}\right) = \ln r + it$$

ist, hebt sich der Term $\ln r$ in obiger Rechnung einfach weg.

Als nächstes können wir den Nullpunkt durch einen anderen festen Punkt $w \in \mathbb{C}$ ersetzen; für einen Kreis

$$\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto w + re^{it} \quad \text{mit} \quad r > 0$$

ist dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i$$

und noch etwas allgemeiner

$$\int_\gamma \frac{a}{z - w} = 2\pi i \cdot a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\,.$$

Tatsächlich können wir den Kreis sogar ersetzen durch *irgendeine* geschlossene doppelpunktfreie Kurve γ, die ein beschränktes Gebiet G berandet und die im mathematisch positiven Sinne, dem Gegenuhrzeigersinn also, durchlaufen wird; auch dann ist für jeden inneren Punkt w von G

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i\,.$$

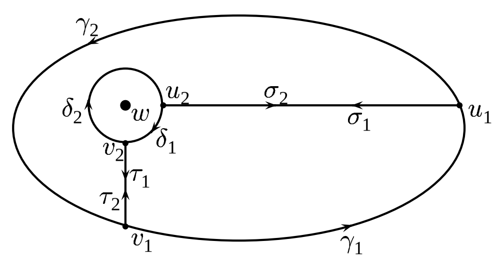
Der Beweis dieser Tatsache ist etwas umfangreicher; im Hinblick auf die nächste Vereinfachung wollen wir ihn gleich etwas allgemeiner führen und als Lemma festhalten:

Lemma: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden inneren Punkt $w \in G$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\,dz = \int_\kappa \frac{f(z)}{z - w}\,dz \quad \text{mit} \quad \kappa\colon \begin{cases} [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto w + re^{it} \end{cases},$$

wobei r so gewählt ist, daß die Kreisscheibe um w mit Radius r ganz in G liegt.

Beweis: Wir wählen geeignete Punkte u_1, v_1 auf γ sowie u_2, v_2 auf κ derart, daß es Verbindungskurven von u_1 nach u_2 und von v_1 nach v_2 gibt, die (abgesehen von den Endpunkten u_2, v_2) ganz in G verlaufen und weder sich selbst noch einander schneiden.



Wir bezeichnen das Kurvenstück von u_1 nach u_2 mit σ_1 und das rückwärts durchlaufene Kurvenstück mit σ_2; entsprechend sei das Kurvenstück von v_1 nach v_2 mit τ_1 und die Gegenrichtung mit τ_2 bezeichnet. Außerdem sei γ_1 der Teil von γ zwischen u_1 und v_1 und γ_2 der zwischen v_1 und u_1, jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Auf dem Kreis κ bewegen wir uns ausnahmsweise *im Uhrzeigersinn;* um Verwechslungen mit der üblichen Umlaufrichtung zu vermeiden, verwenden wir dazu einen neuen Buchstaben und bezeichnen das Stuck zwischen u_2 als δ_1, und das zwischen v_2 und u_2 als δ_2.

Dann können wir eine geschlossene Kurve η_1 betrachten, die von u_1 ausgehend zunächst mit dem Kurvenstück σ_1 nach u_2 geht, dann entlang δ_1 nach v_2 und mit τ_1 nach v_1, um dann mit γ_1 nach u_1 zurückzukehren.

Entsprechend können wir auch eine geschlossene Kurve η_2 betrachten, die nacheinander die Kurvenstücke $\gamma_2, \tau_2, \delta_2, \sigma_2$ durchläuft.

Beide Kurven enthalten den Punkt w nicht in ihrem Innengebiet; nach

dem CAUCHYschen Integralsatz ist daher

$$\int_{\eta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\eta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

Wenn wir die Kurvenstücke einsetzen heißt das, daß

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

und

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\sigma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

sind. Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß sich die Integrale über σ_1 und σ_2 sowie über τ_1 und τ_2 jeweils gegenseitig wegheben, erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

δ_1 und δ_2 ergänzen einander zu einem im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis; da wir bereits wissen, daß das Integral im Gegenuhrzeigersinn gleich $2\pi i$ ist, muß

$$\int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = -\int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w}$$

sein. Außerdem ist

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,,$$

insgesamt also

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,,$$

wie behauptet. ■

Speziell für $f(z) \equiv 1$ erhalten wir die angekündigte Formel

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 2\pi i\,.$$

Man beachte, daß diese Formel auch anwendbar ist auf die Situation, daß γ eine Kreislinie ist, für die w nicht Mittelpunkt ist, sondern einfach *irgendein* innerer Punkt der davon berandeten Kreisscheibe.

Letzte Stufe der Verallgemeinerung ist die

Cauchsche Integralformel: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden Punkt $w \in G$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 2\pi i f(w)\,.$$

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist für jede Kreislinie $\kappa\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto w + re^{it} \end{cases}$ um w mit hinreichend kleinem Radius

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\kappa \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Die rechte Seite ist nach Definition eines komplexen Integrals gleich

$$\int_\kappa \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(\kappa(t)\big)}{\kappa(t)-w}\dot\kappa(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(w+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt$$
$$= i\int_{-\pi}^{\pi} f(w+re^{it})\,dt\,.$$

Diese Formel gilt für alle hinreichend kleinen Radien r; insbesondere gilt sie also auch für $r \to 0$. Dann geht der Integrand aber gegen den

konstanten Wert $f(w)$, d.h.

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\kappa \frac{f(z)}{z-w}\,dz = i\int_{-\pi}^{\pi} f(w)\,dt = 2\pi i f(w)\,,$$

wie behauptet. ■

Man beachte, daß zur Berechnung des rechtsstehenden Integrals nur die Funktionswerte von f auf der Randkurve bekannt sein müssen und daß die Formel trotzdem den Funktionswert für jeden beliebigen inneren Punkt liefert!

e) Meromorphe Funktionen und Laurent-Reihen

Der Integrand $f(z) = \dfrac{1}{z-w}$ der CAUCHYschen Integralformel ist natürlich nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$; für $z = w$ ist er nicht einmal definiert. Allgemeiner ist die Funktion $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-w)^n}$ für jede natürliche Zahl n bei $z = w$ nicht definiert und damit erst recht nicht holomorph.

Trotzdem handelt es sich hier um relativ harmlose Ausnahmepunkte: Wenn wir $f(0) = g(2) = \infty$ setzen, haben wir das Verhalten der Funktion ziemlich genau beschrieben. Das Symbol „∞“ für Unendlich soll dabei *ein* Element bezeichnen, das wir zu $\mathbb{C}$ hinzunehmen. Die entstehende Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist allerdings kein Körper mehr, denn beispielsweise ist

$$1 + \infty = \infty + \pi = 2\infty = i\infty = \infty \cdot e = \infty\,,$$

so daß beispielsweise die Ausdrücke „$\infty - \infty$“ und „∞/∞“ nicht sinnvoll definiert sind. Außerdem ist hier im Komplexen $\infty = -\infty$, da wir ja nur *ein* Element zu $\mathbb{C}$ hinzugefügt haben. Dies unterscheidet das „komplexe ∞“ vom „reellen ∞“, denn im Reellen unterscheidet man bekanntlich sehr wohl zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Hier im Komplexen, wo es keine Größerbeziehung gibt, wäre diese Unterscheidung jedoch sinnlos – es sei denn, wir würden für jeden Winkel φ ein eigenes Element $e^{i\varphi} \cdot \infty$ einführen, was wohl doch etwas zuviel des Guten wäre.

Das neue Element „∞“ ist also sicherlich nicht ganz unproblematisch; wir dürfen es auf keinen Fall als gleichberechtigt mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen betrachten. Insbesondere dürfen wir nicht erwarten, daß wir mit *beliebigen* Funktionen $f: D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sonderlich viel anfangen können; wir müssen uns beschränken auf Funktionen nach Art der beiden Eingangsbeispiele, bei denen die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, hinreichend isoliert sind und die Funktion außerhalb dieser Stellen holomorph ist:

Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn gilt:

1. Die Menge $M \subseteq D$, auf der f den Wert ∞ annimmt, hat keine Häufungspunkte.
2. Die Einschränkung
$$f_{D \smallsetminus M}: D \smallsetminus M \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto f(z)$$
ist holomorph.
3. Zu jedem Punkt $w \in M$ gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $g(z) = (z-w)^n f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist. Die Punkte $w \in M$ heißen *Polstellen* von f; die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die *3.* gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w.

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Defintition: $f(z) = 1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M = \{0\}$; dessen Ordnung ist eins. Entsprechend hat $g(z) = 1/(z-2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung in $w = 2$ und ist in allen anderen Punkten von $\mathbb{C}$ holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} .$$
Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Cosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C} \smallsetminus M$ mit
$$M = \left\{ \pi/2 + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Vom Reellen her wissen wir, daß
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
ist; dies gilt auch im Komplexen, denn
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots .$$
Wegen der Beziehungen
$$\cos(z - \pi/2) = \sin z \quad \text{und} \quad \cos(z + \pi/2) = -\sin z$$
ist dann auch
$$\lim_{z \to -\pi/2} \frac{\cos z}{z + \pi/2} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \to \pi/2} \frac{\cos z}{z - \pi/2} = -1 ;$$
entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Damit ist auch
$$\lim_{z \to -\pi/2} \frac{z + \pi/2}{\cos z} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \to \pi/2} \frac{z - \pi/2}{\cos z} = -1 ,$$
also auch
$$\lim_{z \to -\pi/2} (z + \pi/2) \frac{\sin z}{\cos z} = \sin \pi/2 = 1$$
und
$$\lim_{z \to \pi/2} (z - \pi/2) \frac{\sin z}{\cos z} = -\sin(-\pi/2) = 1 .$$
Somit hat der Tangens in den Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞.)

Wir wollen uns als nächstes davon überzeugen, daß jede meromorphe Funktion um *jeden* Punkt ihres Definitionsbereichs in so etwas ähnliches wie eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann, die sogenannte LAURENT-Reihe.

Ausgangspunkt dafür ist die CAUCHYsche Integralformel

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 2\pi i f(w)\,,$$

die wir zu diesem Zweck umschreiben in

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Die geschlossene Kurve γ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand irgendeines Gebiets, dessen Abschluß noch im Holomorphiegebiet von f liegt, beispielsweise ein hinreichend kleiner Kreis um w.

Bislang hatten wir w immer als konstant angenommen; da w aber beliebig im Innern des von γ berandeten Gebiets variieren kann, spricht nichts dagegen, auch w als Variable zu betrachten; in der Tat wird im folgenden w die eigentlich interessante Variable sein, wohingegen die Integrationsvariable z nur noch eine Hilfsfunktion hat. Um dies auch optisch zu unterstreichen, vertauschen wir die beiden Variablennamen und schreiben die CAUCHYsche Integralformel noch einmal um in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Als nächstes entwickeln wir den Integranden in eine Potenzreihe:

Auch im Komplexen gilt die Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,,$$

denn

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1-q^{n+1}\,.$$

Falls $|q| < 1$ ist, können wir wie im Reellen n gegen ∞ gehen lassen und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |w-z_0|$ ist daher

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}$$
$$= \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,.$$

Setzen wir dies in die CAUCHYsche Integralformel ein, folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\cdot(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\,.$$

Obwohl wir f nur als holomorph, d.h. einmal (komplex) stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, konnten wir die Funktion also in eine TAYLOR-Reihe entwickeln!

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei holomorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist f auf D beliebig oft stetig differenzierbar und sogar analytisch. Genauer gilt für jeden Punkt $z_0 \in D$ und jeden Punkt z aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0}{k!}(z-z_0)^k \quad\text{und}\quad f^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\,,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt.

Beweis: Wir haben gerade gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}} \,.$$

Die rechts stehende Potenzreihe entstand durch Integration einer geometrischen Reihe; sie ist also absolut und gleichmäßig konvergent und damit beliebig oft differenzierbar im Innern des Kreises γ. Damit ist dort auch f beliebig oft differenzierbar, insbesondere also stetig differenzierbar, mit k-ter Ableitung

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\cdots\big(\ell-(k-1)\big) a_\ell (z - z_0)^{\ell-k} \,.$$

Für $z = z_0$ verschwinden rechts alle Summanden außer dem ersten, d.h.

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \quad \text{und} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \,.$$

Damit können wir die Reihe in gewohnter Weise schreiben, und ein Vergleich der beiden Formeln für a_k zeigt auch die behaupteten Integraldarstellungen der Ableitungen. ■

An diesem Satz zeigt sich deutlich, wie grundverschieden reelle und komplexe Analysis sind: Im Reellen gibt es Funktionen, die n-fach differenzierbar sind, nicht aber $(n+1)$-fach; einfachstes Beispiel ist $f_n(x) = x^{n-1}|x|$ für $x = 0$. Auch ist die Funktion $f_n(x)$ zwar n-fach differenzierbar, nicht aber n-fach *stetig* differenzierbar. Schließlich gibt es noch Funktion wie $f(x) = e^{-1/x^2}$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, aber (hier für $x = 0$) nicht durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden können. Im Komplexen folgt, wie wir gesehen haben, aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit bereits, daß die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar und überall durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar ist. Tatsächlich reicht sogar die gewöhnliche komplexe Differenzierbarkeit, d.h. die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; um das zu beweisen, hätten wir uns allerdings beim CAUCHYschen Integralsatz nicht mit CAUCHYs Beweis zufriedengeben dürfen, sondern hätten mehr arbeiten müssen. So haben wir nur bewiesen, daß aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *und* der Stetigkeit aller partieller Ableitungen die Existenz aller komplexer Ableitungen und die Darstellbarkeit durch eine TAYLOR-Reihe folgt.

Betrachten wir nun eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und einen Punkt $z_0 \in D$. Falls f in z_0 holomorph ist, ist es auch in einer Umgebung von z_0 holomorph, also dort in eine TAYLOR-Reihe entwikkelbar.

Andernfalls muß z_0 ein Pol sein; dessen Ordnung sei n. Dann ist die Funktion $g(z) \underset{\text{def}}{=} (z - z_0)^n f(z)$ holomorph, hat also eine TAYLOR-Entwicklung

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \,.$$

Division durch $(z - z_0)^n$ ergibt die LAURENT-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = c_{k-n} \,.$$

Dabei ist $a_{-n} \neq 0$, denn sonst wäre auch $(z - z_0)^{n-1} f(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0, die Polstelle hätte also höchsten die Ordnung $n - 1$.

Damit folgt:

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei meromorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es für jeden Punkt $z_0 \in D$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß für jeden Punkt $z \neq z_0$ aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt und außer eventuell z_0 keine Pole von f enthält, gilt:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}} \,,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt und dieses Innere keine Polstellen außer höchstens z_0 enthält. ■