WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

31. März 2003

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion.

Lösung: *Richtig,* denn für $z \neq 2$ ist die Funktion sogar holomorph, und für $z = 2$ ist $(z-2)f(z) = z-1$ holomorph mit Wert eins für $z = 2$, d.h. bei $z = 2$ hat f einen Pol erster Ordnung.

2) Was ist $\int_\gamma \frac{\sin z}{z}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

Lösung: Wegen $\lim\limits_{z\to 1} \frac{\sin z}{z} = 1$ ist der Integrand überall holomorph; das Integral verschwindet also nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

3) Was ist $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

Lösung: $\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \cdots$; der Integrand hat also im Nullpunkt das Residuum null und ist ansonsten holomorph. Nach dem Residuensatz verschwindet daher das Integral.

4) Richtig oder falsch: $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$

Lösung: *Falsch;* die Exponentialfunktion liefert nur invertierbare Matrizen, da $e^A \cdot e^{-A}$ stets die Einheitsmatrix ist.

5) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = (a_{k\ell}) \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ mit $a_{k\ell} = (k-\ell)i$ hat nur reelle Eigenwerte.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist HERMITEsch.

6) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 2\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch:* $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^2$ sind zwei verschiedene Lösungen.

7) Richtig oder falsch: $\dot y(t) = y(t) \arctan t$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn die Ableitung $\arctan t$ der rechten Seite nach y ist beschränkt, so daß die rechte Seite einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt; der Satz von PICARD-LINDELÖF ist also anwendbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx\,!$

Lösung: Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 2$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 2i$; beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to z_\nu} \frac{(z-z_\nu)z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z+i)(z-i)(z^2+4)}\\ &= \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{-1}{(i+i)(i^2+4)} = \frac{-1}{2i\cdot 3} = \frac{i}{6}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)z^2}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)}\\ &= \lim_{z\to 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{(2i)^2}{\big((2i)^2+1\big)(2i+2i)} = \frac{-4}{-3\cdot 4i} = -\frac{i}{3}\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)} + \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)\\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2it}\cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)}\,dt$$

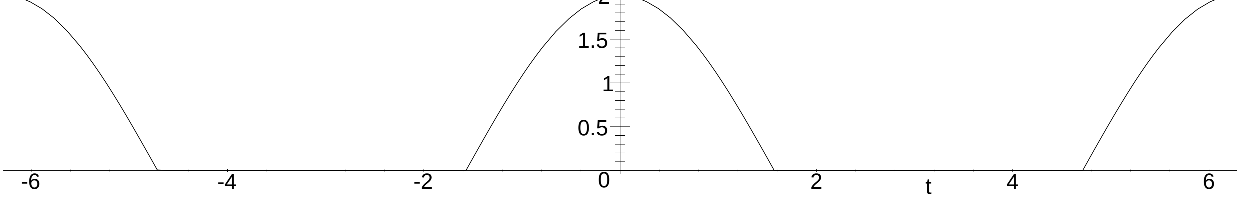
gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0,\pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \cos t + |\cos t|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung: Für $\cos t \ge 0$ ist $\cos t = |\cos t|$, also $f(t) = 2\cos t$; andernfalls ist $|\cos t| = -\cos t$ und $f(t) = 0$. Dies ergibt folgendes Bild:



b) Welche Periode hat f? Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da sowohl der Cosinus als auch sein Betrag gerade Funktionen sind, gilt dasselbe auch für f; auch die Periode 2π wird durch die Differenzbildung nicht kleiner.

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f!

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme. Zur Berechnung des konstanten Terms sowie der Koeffizienten der Cosinusterme können wir über *irgendein* Periodenintervall integrieren, beispielsweise über das von $-\pi$ bis π. Dort ist $f(t) = 2\cos t$ für $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ und null sonst; somit ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{2}{\pi},$$

und für $k > 0$ ist $a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\cos kt\,dt$. Nach Euler ist

$$\begin{aligned}\cos t\cos kt &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\cdot\frac{e^{kit}+e^{-kit}}{2} = \frac{e^{(k+1)it}+e^{-(k+1)it}}{4} + \frac{e^{(k-1)it}+e^{-(k-1)it}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t\big),\end{aligned}$$

speziell für $k = 1$ also $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$ und $a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{\pi} = 1$.
Für $k > 1$ können wir auch durch $k-1$ dividieren und erhalten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}.$$

Ist k ungerade, setzen wir hier im Sinus stets ganzzahlige Vielfache von π ein, d.h. $a_k = 0$. Für gerades k bekommen wir echt halbzahlige Vielfache von π; da $\sin(\ell + \frac{1}{2})\pi$ für gerades ℓ eins und für ungerades ℓ minus eins ist, haben die beiden Terme Summanden stets entgegengesetzte Vorzeichen. Für durch vier teilbares k ist

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)}{k+1} + \frac{-1-1}{k-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) = -\frac{4}{\pi(k^2-1)},$$

für nicht durch vier teilbares gerades $k > 0$ erhalten wir dasselbe ohne führendes Minuszeichen. Insgesamt ist also für $k > 0$

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1\\ 0 & \text{für } k > 1 \text{ ungerade}\\ -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \equiv 0 \bmod 4\\ \frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \equiv 2 \bmod 4\end{cases},$$

und die Fourier-Reihe von f ist $S_f(t) = \frac{2}{\pi} + \cos t + \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\frac{4}{\pi(4\ell^2-1)}\cos 2\ell t$.

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Da f stetig ist, konvergiert die FOURIER-Reihe konvergiert überall gegen $f(t)$.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Da f stetig ist, nirgends.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \max(1 - |t|, 0)$ und drücken Sie diese durch reelle trigonometrische Funktionen aus!

Lösung: Für $|t| > 1$ ist $f(t) = 0$, also ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} \big(1 - |t|\big)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{0} te^{-i\omega t}\,dt - \int_{0}^{1} te^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int te^{-i\omega t}\,dt = -t\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} - \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\,dt = -t\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C\,,$$

also ist

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{1 - e^{i\omega}}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega} - 1}{\omega^2} = \frac{2 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2}\\ &= \frac{2 - 2\cos\omega}{\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distribution $f(t) = \frac{1}{2}\big(\delta(t+1) + \delta(t-1)\big)$!

Lösung: $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega} + e^{i\omega}\right) = \cos\omega\,.$

b) Welche FOURIER-Transformierte im Distributionensinne hat $g(t) = \cos t$?

Lösung: Nach *a)* ist $\breve{g}(\omega) = f(\omega)$ und allgemein gilt $\widehat{g}(\omega) = 2\pi\breve{g}(-\omega)$. Da f eine gerade Funktion ist, folgt $\widehat{g}(\omega) = 2\pi f(\omega) = \pi\big(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\big)$.

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Entwicklung nach der ersten Zeile (oder Spalte) gefolgt von Entwicklung nach der dritten Zeile (oder Spalte) ergibt

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(3-\lambda)\big((-1-\lambda)(-5-\lambda) + 4\big)\\ &= (-3-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (-3-\lambda)^3(3-\lambda)\,.\end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit drei und $\lambda_2 = 3$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.

$\lambda_2 = 3$ hat offensichtlich den dritten Koordinateneinheitsvektor als Eigenvektor; für $\lambda_1 = -3$ sehen wir sofort, daß der erste Koordinateneinheitsvektor ein Eigenvektor ist, es könnte aber noch weitere geben. Wegen

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

müssen die Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Eigenvektors das lineare Gleichungssystem

$$2x_2 + 2x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad -2x_2 - 2x_4 = 0$$

erfüllen, d.h. $x_2 = -x_4$ und $x_3 = 0$; für x_1 gibt es keine Bedingung. Damit ist der Eigenraum zweidimensional mit beispielsweise den Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Basis; die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist also nur zwei.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn es gibt keine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Eine Dreiecksgestalt erhalten wir bezüglich einer Basis aus Eigen- und Hauptvektoren. Für $\lambda_1 = -3$ haben wir nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren, wir brauchen also noch einen Hauptvektor zweiter Stufe.

$$(A + 3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß für jeden Vektor aus dem Hauptraum zweiter Stufe die dritte Komponenten verschwinden muß; eine von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängige Lösung ist beispielsweise

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für den noch fehlenden Basisvektor nehmen wir den Eigenvektor zum Eigenwert drei, also den dritten Basisvektor. Für die Dreiecksgestalt fehlt nun nur noch das Bild von $\vec{v}_3$; es ist die vierte Spalte der Matrix A, also

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -3\vec{v}_3 + \vec{v}_2 .$$

Bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ hat A also die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

d) Berechnen Sie die Matrix $e^{\Delta t}$!

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix, und da nach der allgemeinen Theorie $DN = ND$ ist, folgt

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

e) B sei der Vektorraum aller für $t \to \infty$ beschränkter Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$. Welche Dimension hat B?

Lösung: *Drei,* denn eine Lösung ist genau dann beschränkt, wenn die Anfangswerte im Hauptraum des negativen Eigenwerts -3 liegen.

f) Gibt es beschränkte Lösungen, die stabil sind gegenüber kleineren Variationen der Anfangsbedingungen?

Lösung: *Nein,* denn es gibt auch einen positiven Eigenwert; sobald eine Anfangsbedingung in Richtung des zugehörigen Eigenvektors gestört wird, geht die zugehörige Lösung gegen unendlich.

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2y(t) + 3z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) + 2z(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t)\,!$$

Lösung: In Matrixschreibweise ist dies das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

wir müssen e^{At} berechnen. Dazu schreiben wir

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = -E \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

da die negative Einheitsmatrix mit jeder Matrix vertauschbar sind, ist natürlich $DN = ND$. Außerdem ist

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und aller höheren Potenzen von N verschwinden, d.h. $e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}Nt^2$. Damit ist

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = \left(e^{-t}E\right)\begin{pmatrix} 1 & 2t & t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 2te^{-t} & (3t+2t^2)e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + (2y_0 + 3z_0)t + 2z_0t^2\right)e^{-t} \\ y(t) &= (y_0 + 2z_0t)e^{-t} \\ z(t) &= z_0e^{-t} \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Diese Konstanten sind die Werte der drei Lösungsfunktionen an der Stelle null.

b) Bestimmen Sie die Lösung, die den Anfangsbedingungen $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ und $z(0) = -1$ genügt!

Lösung: Einsetzen von $x_0 = 5$, $y_0 = 2$ und $z_0 = -1$ in obige Lösung ergibt

$$x(t) = \left(5 + t - 2t^2\right)e^{-t}, \quad y(t) = (2 - 2t)e^{-t} \quad \text{und} \quad z(t) = -e^{-t}.$$

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 4\cos t - 4\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = 0, \ \ddot{y}(0) = -2\,!$$

Lösung: Zwei Möglichkeiten bieten sich an: Entweder wir lösen zunächst *b)*, wo wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erraten müssen, oder wir lösen *a)* direkt via LAPLACE-Transformation. Letzteres ergibt für $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) &= s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3Y(s) - 2s^2 + 2 \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 2s \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 2 \end{aligned}$$

die Beziehung $(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - 2s^2 + 2 + 6s - 6 = \dfrac{4s-4}{s^2+1}$ oder

$$(s-1)^3Y(s) = \frac{4s-4}{s^2+1} + 2s^2 - 6s + 4 = \frac{2s^4 - 6s^3 + 6s^2 - 2s}{s^2+1} = \frac{2s(s-1)^3}{s^2+1}.$$

Damit ist $Y(s) = \dfrac{2s}{s^2+1}$ und $y(t) = 2\cos t$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 4\cos t - 4\sin t\,!$$

Lösung: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$ hat die dreifache Nullstelle $\lambda = 1$; die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist also $y(t) = (C_1+C_2t+C_3t^2)e^t$ mit beliebigen $C_i \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung entsteht daraus durch Addition irgendeiner speziellen Lösung, z.B. der in *a)* berechneten. Also ist die allgemeine Lösung $y(t) = 2\cos t + (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^t$.

c) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten dieser Lösungen?

Lösung: Abgesehen von der reinen Schwingung $y(t) = 2\cos t$ werden alle Lösungen unbeschränkt.