WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

31. März 2003

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion.

2) Was ist $\int_\gamma \frac{\sin z}{z}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

3) Was ist $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

4) *Richtig oder falsch:* $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$

5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = (a_{k\ell}) \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ mit $a_{k\ell} = (k-\ell)i$ hat nur reelle Eigenwerte.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

7) *Richtig oder falsch:* $\dot{y}(t) = y(t)\arctan t$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$!

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \cos t + |\cos t|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Welche Periode hat f? Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \max(1-|t|, 0)$ und drücken Sie diese durch reelle trigonometrische Funktionen aus!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distribution $f(t) = \frac{1}{2}\big(\delta(t+1) + \delta(t-1)\big)$!

b) Welche FOURIER-Transformierte im Distributionensinne hat $g(t) = \cos t$?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Berechnen Sie die Matrix $e^{\Delta t}$!

e) B sei der Vektorraum aller für $t \to \infty$ beschränkter Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$. Welche Dimension hat B?

f) Gibt es beschränkte Lösungen, die stabil sind gegenüber kleineren Variationen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2y(t) + 3z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) + 2z(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t)\,!$$

b) Bestimmen Sie die Lösung, die den Anfangsbedingungen $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ und $z(0) = -1$ genügt!

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 4\cos t - 4\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = -2\,!$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 4\cos t - 4\sin t\,!$$

c) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten dieser Lösungen?

Formelanhang

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t-1)^2 e^t - \cos(t) + \sin(t)\right\}(s) = \frac{4}{(s^2+1)(s-1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2-1) e^t + \cos(t) + \sin(t)\right\}(s) = \frac{4s}{(s^2+1)(s-1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2+2t-1) e^t + \cos(t) - \sin(t)\right\}(s) = \frac{4s^2}{(s^2+1)(s-1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2+4t+1) e^t - \cos(t) - \sin(t)\right\}(s) = \frac{4s^3}{(s^2+1)(s-1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2+6t+5) e^t - \cos(t) + \sin(t)\right\}(s) = \frac{4s^4}{(s^2+1)(s-1)^3}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 31. März 2003, um 13^{00} Uhr