Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2003

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = e^{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Lösung: *Richtig,* denn nach der Kettenregel ist dann auch g überall komplex differenzierbar.

2) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = e^{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

Lösung: *Falsch;* für $f(z) = 1/z$ etwa hat $g(z) = e^{1/z}$ an der Stelle $z = 0$ nicht nur einen Pol, denn $\lim_{z\to\infty} z^n e^{1/z}$ existiert für kein n.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Fourier-Reihen von $f(t)$ und $g(t)$ (mit derselben Periode T) nur Sinusterme enthalten, gilt daselbe auch für die von $h(t) = f(t)g(t)$.

Lösung: *Falsch,* denn hier sind $f(t)$ und $g(t)$ ungerade Funktionen, ihr Produkt $h(t)$ ist also gerade und hat somit eine Fourier-Reihe, die nur Cosinusterme enthält.

4) Richtig oder falsch: Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ habe die drei verschiedenen Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3. Ist $\vec{v}_1$ Eigenvektor zu λ_1 und $\vec{v}_2$ Eigenvektor zu λ_2, so ist $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ Eigenvektor zu λ_3.

Lösung: *Richtig,* denn Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Ein Vektor des $\mathbb{R}^3$, der senkrecht auf $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ steht, ist aber proportional zu $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \dfrac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn die partielle Ableitung $\dfrac{-\sin t \cdot \sin y}{1+t^8}$ der rechten Seite nach y ist beschränkt, so daß wir den Satz von Picard-Lindelöf anwenden können.

6) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist Hermitesch.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)}$?

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 1$ liegt im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises nur der Pole $z_0 = i$; er hat die Ordnung eins und das Residuum des Integranden ist dort

$$\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+2i)(z+3i)(z+4i)} = \frac{1}{3i\cdot 4i\cdot 5i} = -\frac{1}{60i}\,.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{dz}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-1}{60i} = -\frac{\pi}{30}\,.\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)}\,dz = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(Re^{it}-i)(Re^{it}+2i)(Re^{it}+3i)(Re^{it}+4i)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
$$\ddot y(t) + 10\dot y(t) + 41y(t) = 32\cos 3t - 30\sin 3t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot y(t) + 10\dot y(t) + 41y(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 10\lambda + 41 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus
$$\lambda^2 + 10\lambda + 41 = (\lambda+5)^2 + 16 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also
$$\lambda_{1/2} = -5 \pm 4i\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist also

$$y(t) = e^{-5t}(a\cos 4t + b\sin 4t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, da die Differenz zweier Lösungen die homogene Gleichung erfüllt. Hier geht es um die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung; es sollte also eine spezielle Lösung geben, die mit der anregenenden Frequenz schwingt. Der Ansatz

$$y(t) = \alpha\cos 3t + \beta\sin 3t$$

mit
$$\dot y(t) = -3\alpha\sin 3t + 3\beta\cos 3t \quad \text{und} \quad \ddot y(t) = -9\alpha\cos 3t - 9\beta\sin 3t$$

führt links auf

$$\begin{aligned}&-9\alpha\cos 3t-9\beta\sin 3t-30\alpha\sin 3t+30\beta\cos 3t+41\alpha\cos 3t+41\beta\sin 3t\\ &=\big((41-9)\alpha+30\beta\big)\cos 3t+\big((41-9)\beta-30\alpha\big)\sin 3t\,,\end{aligned}$$

was gleich der rechten Seite $32\cos 3t-30\sin 3t$ sein soll, d.h.

$$32\alpha+30\beta=32 \quad \text{und} \quad 32\beta-30\alpha=-30\,.$$

Die Lösung $\alpha=1$ und $\beta=0$ springt ins Auge; die gesuchte reine Schwinung ist also einfach $\cos 3t$, und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist

$$y(t)=\cos 3t+e^{-5t}(a\cos 4t+b\sin 4t) \quad \text{mit} \quad a,b\in\mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t\to\infty$?

Lösung: Da e^{-5t} gegen null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $y(t)=\cos 3t$.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(t)=\begin{cases}e^{-2t} & \text{für } 0\le t\le 5\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f!

Lösung:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_0^5 e^{-2t}e^{-i\omega t}\,dt=\int_0^5 e^{-(2+i\omega)t}\,dt=\left.\frac{-e^{-(2+i\omega)t}}{2+i\omega}\right|_0^5\\ &=\frac{1-e^{-(10+5i\omega)}}{2+i\omega}\,.\end{aligned}$$

b) Geben Sie deren Betrag in einer rein reellen Form an!

Lösung:

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2&=\widehat{f}(\omega)\cdot\overline{\widehat{f}(\omega)}=\frac{1-e^{-(10+5i\omega)}}{2+i\omega}\cdot\frac{1-e^{-(10-5i\omega)}}{2-i\omega}\\ &=\frac{1+e^{-20}-e^{-10}(e^{5i\omega}+e^{-5i\omega})}{4+\omega^2}=\frac{1+e^{-20}-2e^{-10}\cos 5\omega}{4+\omega^2}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\widehat{f}(\omega)\right|=\sqrt{\frac{1+e^{-20}-2e^{-10}\cos 5\omega}{4+\omega^2}}\,.$$

c) Die Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ entstehe aus f durch Faltung mit $\varphi(t)=e^{-t^2/2}$. Was ist die Fourier-Transformierte von g?

Lösung: Die Fourier-Transformierte einer Faltung ist das Produkt der Fourier-Transformierten der beiden gefalteten Funktionen; da die Fourier-Transformierte der Standardnormalverteilung $\sqrt{2\pi}$ mal einer Standardnormalverteilung ist, ist auch

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2} \quad \text{und} \quad \widehat{g}(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}\frac{1-e^{-(10+5i\omega)}}{2+i\omega}\,.$$

d) Die Funktion $h(t)$ entstehe aus f durch periodische Fortsetzung der Werte auf dem Intervall $[0,5)$ mit Periode fünf auf $\mathbb{R}$; ihre FOURIER-Reihe sei $S_h(t)$. (Es ist *nicht* gefragt, wie $S_h(t)$ aussieht.) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $S_h(t)$!

Lösung: $h(t)$ ist überall stetig außer an den ganzzahligen Vielfachen von fünf. Dort springt $h(t)$ von $f(5) = e^{-10}$ (rechtsseitiger Grenzwert) auf $f(0) = e^0 = 1$ (linksseitiger Grenzwert). Die FOURIER-Reihe konvergiert an solchen Stellen gegen das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte, also ist

$$S_h(t) = \begin{cases} h(t) & \text{falls } t \notin 5\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}(1+e^{-10}) & \text{falls } t \in 5\mathbb{Z} \end{cases}.$$

e) Wo tritt bei der Konvergenz von $S_h(t)$ das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: An den Unstetigkeitsstellen, also, wie gerade diskutiert, bei den ganzahligen Vielfachen von fünf.

Aufgabe 4: (*13 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((-3-\lambda)(1-\lambda)+4\big) = (1-\lambda)\big(1+2\lambda+\lambda^2\big)\big) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2 . \end{aligned}$$

Es gibt also den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins, sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit zwei.
Der Eigenraum zu λ_1 wird, wie man sofort sieht, vom Basisvektor $\vec{b}_1$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ aufgespannt.
Wie die Matrix $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ zeigt, wird der Eigenraum zu λ_2 vom Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt; die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist also nur eins.

c) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu λ_2.

Entweder die Berechnung von $(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder die Beobachtung, daß die Multiplikation mit $A+E$ die erste Komponente eines Vektors verdoppelt und somit auch bei beliebig häufiger Anwendung nie eine von null verschiedene erste Komponente zu null macht, zeigen, daß jede Linearkombination des zweiten und dritten Basisvektors im Hauptraum liegt; als Hauptvektor zweiter Stufe können wir daher jeden von $\vec{v}_2$ linear unabhängigen solchen Vektor nehmen, beispielsweise den dritten Basisvektor $\vec{b}_3$.

Für diesen ist
$$A\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 - \vec{b}_3\,;$$
bezüglich der Basis aus $\vec{b}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{b}_3$ hat A also die Dreiecksgestalt
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Erwartungsgemäß kommutieren N und D, d.h.
$$\begin{aligned} e^{Mt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ aussieht, brauchen wir die Matrix B des Basiswechsels: Mit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
ist $M = B^{-1}AB$ und $A = BMB^{-1}$, also
$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & -4te^{-t} & (1+2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

d) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ist, gibt es nur die eine Lösung $\vec{y}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-2t)e^{-t} \\ -4te^{-t} \end{pmatrix}$.

e) Wir verhalten sich diese für $t \to \infty$?

Lösung: Da auch $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ ist, nähert sie sich dem Nullvektor.

f) Für welche Anfangsbedingungen $x(0) = a,\ y(0) = b,\ z(0) = c$ bleiben die Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

Lösung: e^{-t} und te^{-t} gehen für $t \to \infty$ gegen null, aber e^t wächst über alle Grenzen. Ein Term mit e^t tritt offensichtlich genau dann auf, wenn a nicht verschwindet; die Lösungen bleiben also genau dann beschränkt, wenn $a = 0$ ist.

g) Wann sind die bei *f)* auftretenden Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nie! Sobald a auch nur minimal von null verschieden ist, dominiert auf lange Sicht die x-Komponente und zieht die Lösung ins Unendliche.