Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2003

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = e^{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

2) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = e^{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Fourier-Reihen von $f(t)$ und $g(t)$ (mit derselben Periode T) nur Sinusterme enthalten, gilt daselbe auch für die von $h(t) = f(t)g(t)$.

4) Richtig oder falsch: Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ habe die drei verschiedenen Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3. Ist $\vec{v}_1$ Eigenvektor zu λ_1 und $\vec{v}_2$ Eigenvektor zu λ_2, so ist $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ Eigenvektor zu λ_3.

5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \dfrac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

6) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-i)(z+2i)(z+3i)(z+4i)}$?

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
$$\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 41y(t) = 32\cos 3t - 30\sin 3t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Aufgabe 3: (*8 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{für } 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f!

b) Geben Sie deren Betrag in einer rein reellen Form an!

c) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entstehe aus f durch Faltung mit $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Was ist die Fourier-Transformierte von g?

d) Die Funktion $h(t)$ entstehe aus f durch periodische Fortsetzung der Werte auf dem Intervall $[0,5)$ mit Periode fünf auf $\mathbb{R}$; ihre Fourier-Reihe sei $S_h(t)$. (Es ist *nicht* gefragt, wie $S_h(t)$ aussieht.) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $S_h(t)$!

e) Wo tritt bei der Konvergenz von $S_h(t)$ das Gibbs-Phänomen auf?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 4: *(13 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

c) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

d) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$!

e) Wir verhalten sich diese für $t \to \infty$?

f) Für welche Anfangsbedingungen $x(0) = a,\ y(0) = b,\ z(0) = c$ bleiben die Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

g) Wann sind die bei *f)* auftretenden Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{N}\ \mathcal{W}\ \mathcal{E}\ \mathcal{I}\ \mathcal{S}$

Für die Standardnomalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ ist $\widehat{\varphi}(\omega) = e^{-\omega^2/2}$.

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Noch nicht abgeholte Scheine und Nachklausuren können Sie bei der Abgabe dieser Klausur mitnehmen.