WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

9. April 2003

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

Lösung: *Falsch;* auch jede Diagonalmatrix mit irgendwie verteilten Diagonaleinträgen ± 1 hat diese Eigenschaft; außerdem auch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und viele andere Matrizen.

2) Richtig oder falsch: $\mathcal{B} = \{x+2, x+3, x^2+4\}$ ist eine Basis des Vektorraums P_2 aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

Lösung: *Richtig,* denn $1 = (x+3) - (x+2)$ liegt in $[\mathcal{B}]$, damit auch $x = x+2-2\cdot 1$ und $x^2 = x^2+4-4\cdot 1$, d.h. $[\mathcal{B}] = P_2$, und eine dreielementige Menge, die einen dreidimensionalen Vektorraum erzeugt, ist Basis.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & \text{falls } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Was ist $\det A$?

Lösung: Die Matrix ist eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii} = 0$. Also ist $\det A = 0$.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \end{cases}$ ist linear.

Lösung: *Richtig;* φ ist die Abbildung $\binom{x}{y} \mapsto x+y$, und die ist offensichtlich linear.

5) Richtig oder falsch: Für alle $a > 0$ ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{a}$

Lösung: *Falsch;* das Integral über die nirgends negative Funktion $1/x^2$ kann unmöglich negativ sein. Die naive Formel gilt nicht, da der Integrand (und auch die Stammfunktion) im Nullpunkt nicht definiert sind. (Hier existiert auch kein CAUCHYscher Hauptwert.)

6) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ sei wirbelfrei, und γ sei eine ganz in D liegende geschlossene Kurve. Dann ist $\int_\gamma \vec{V}(x)\,dx = 0$.

Lösung: *Falsch;* das gilt allgemein nur für einfach zusammenhängende D. Ein Gegenbeispiel für $D = \mathbb{R}^3$ minus z-Achse liefert etwa das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

7) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ für $\varphi(x,y,z) = x\sin y + y\cos z$?

Lösung: Null, denn die Rotation eines Gradienten ist stets das Nullvektorfeld, und dessen Divergenz ist null.

8) Was ist $\int\limits_\gamma \pi\, ds$ für das im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Quadrat γ mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$?

Lösung: 8π, denn $\int\limits_\gamma 1\, ds$ ist gleich der Bogenlänge von γ, also gleich dem Umfang acht des Quadrats.

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)

V sei die Menge aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x mit der Eigenschaft $f(1) = 0$.

a) Zeigen Sie, daß V ein Vektorraum ist und finden Sie eine Basis von V!

Lösung: Für zwei Polynome $f, g \in V$ und reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ hat auch $\lambda f + \mu g$ höchstens Grad vier, und $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 0$.

Die wohl einfachste Basis von V besteht aus den Polynomen $x-1, x^2-1, x^3-1$ und x^4-1: Sie sind offensichtlich linear unabhängig, und sie erzeugen V, denn bezeichnet P_4 den Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens vier, so ist V der Kern der surjektiven Abbildung $P_5 \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(1)$, hat also nach der Dimensionsformel die Dimension vier.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f(x) \mapsto f'(x) - f'(1)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Die Linearität ist klar, da sowohl die Differentiation als auch das Einsetzen eines speziellen Werts (hier Eins) lineare Operationen sind. Das Bild eines Polynoms vom Grad höchstens vier ist höchstens vom Grad drei und liegt in V, da $\varphi(f)(1) = f'(1) - f'(1)$ verschwindet.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild dieser Abbildung!

Lösung: Im Kern liegen alle Polynome $f \in V$ mit $f'(x) = f'(1)$; insbesondere sind diese Polynome also höchstens linear. Ein lineares Polynom liegt genau dann in V, wenn es die Form $f(x) = ax - a$ hat, und dann liegt es offensichtlich auch im Kern von φ. Eine Basis des Kerns ist also beispielsweise $\{x-1\}$.

Das Bild besteht aus Polynomen vom Grad höchstens drei und hat nach der Dimensionsformel die Dimension $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi = 4 - 1 = 3$, also besteht es aus *allen* Polynomen vom Grad höchstens drei aus V und hat beispielsweise die Polynome $x-1, x^2-1$ und x^3-1 als Basis.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: Die Basisvektoren seien so angeordnet, wie oben in *a)*. Wegen

$$\begin{aligned}
\varphi(x-1) &= 0 \\
\varphi(x^2-1) &= 2x - 2 = 2(x-1) \\
\varphi(x^3-1) &= 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) \\
\varphi(x^4-1) &= 4x^3 - 4 = 4(x^3-1)
\end{aligned}$$

und da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist die Abbildungsmatrix somit gleich gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi \colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

Lösung: Klar, denn jede Anwendung von φ erniedrigt den Grad eines nichtkonstanten Polynoms um eins, und die linearen Polynome aus V liegen im Kern von φ.

f) Was ist A^4 ?

Lösung: A^4 ist die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi$, was nach *e)* gleich der Nullabbildung ist. Also ist A^4 die Nullmatrix. Alternativ sieht man das auch daran, daß A eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonale ist; durch jede Multiplikation mit A wird parallel zur Hauptdiagonalen eine weitere Reihe von Nullen eingefügt.

Aufgabe 2: (*8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrl} x\, + & ay\, + & (1-a)z & = -3a \qquad (1)\\ 3x\, + & (4-a)y\, - & z & = 4 \qquad (2)\\ x\, + & y\, - & 2az & = 1-6a \qquad (3) \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{array}{rrl} (4-4a)y\, + & (3a-4)z & = 9a+4 \qquad (4)\\ (1-a)y\, - & (a+1)z & = 1-3a \qquad (5) \end{array}$$

Zur Vermeidung von Brüchen subtrahieren wir (4) vom vierfachen der letzten Gleichung; dies ergibt

$$-7az = -21a \quad \text{oder} \quad az = 3a\,.$$

Für $a \neq 0$ können wir kürzen und erhalten $z = 3$; für $a = 3$ haben wir die für beliebiges $z = \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllte Gleichung $0z = 0$. Gleichung (5) wird für $a = 1$ zu $0y - z = -2$, was wegen $z = 3$ unmöglich ist; für $a \neq 1$ erhalten wir

$$y = \frac{1-3a+(a+1)z}{1-a} = \begin{cases} \frac{1-3a+3(a+1)}{1-a} = \frac{2}{1-a} & \text{für } a \neq 0,1 \text{ und } z = 3\\ 1+\lambda & \text{für } a = 0 \text{ und } z = \lambda \end{cases}.$$

Aus Gleichung (1) schließlich folgt

$$x = -3a - ay - (1-a)z = \begin{cases} -3a - \frac{2a}{1-a} - 3 + 3a = \frac{a+3}{a-1} & \text{für } a \neq 0,1 \text{ und } z = 3\\ -\lambda & \text{für } a = 0 \text{ und } z = \lambda \end{cases}.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{a+3}{a-1}, \frac{2}{1-a}, 3\right)\right\} & \text{für } a \neq 0,1\\ \left\{(-\lambda, 1+\lambda, \lambda) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 0\\ \emptyset & \text{für } a = 1 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*6 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad drei für $f(x,y) = \sinh(x+y^2)$ um den Punkt $(0,0)$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Falls man es nicht auch so weiß, findet man aus der bekannten Reihe der Exponentialfunktion und der Formel $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}$ die TAYLOR-Reihe

$$\sinh z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\ ;$$

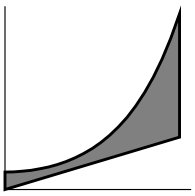
einsetzen von $z = x + y^2$ und streichen aller Terme vom Grad größer drei liefert das Ergebnis

$$T_3(x,y) = 1 + x + y^2 + \frac{x^3}{3!}\ .$$

b) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x,y) = x^3 + y^2$ um den Punkt $(0,1)$!

Lösung: Hier geht es darum, die Funktion $T(h,k) = f(h, 1+k) = h^3 + (1+k)^2$ als Polynom in h und k zu schreiben; Ausmultiplizieren liefert $T(h,k) = 1 + 2k + k^2 + h^3$.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)



Das ebene Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ sei nach oben begrenzt durch die Kurve $y = \cosh x$, nach unten durch die Winkelhalbierende $y = x$ und nach den Seiten durch die Geraden $x = 0$ und $x = 3$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt (grau) von G!

b) Berechnen Sie den Umfang (schwarz) von G! *(Hinweis: Interpretieren Sie die Kurve $y = \cosh x$ als Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$!)*

Lösung:

a) Die Fläche zwischen der Kurve $y = \cosh x$ und der x-Achse ist

$$\int_0^3 \cosh x\, dx = \sinh x\Big|_0^3 = \sinh 3\ ,$$

die zwischen x-Achse und Winkelhalbierender ist $3^2/2 = 9/2$. Die gesuchte Fläche ist also $\sinh 3 - 9/2 \approx 5{,}51787493$.

b) Wir schreiben die Kurve $y = \cosh x$ als

$$\gamma\colon \begin{cases} [0,3] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, \cosh t) \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix};$$

dann ist $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$, und die Bogenlänge der Kurve ist

$$\int_\gamma |\dot\gamma(t)|\ dt = \int_0^3 \cosh t\, dt = \sinh 3 - \sinh 0 = \sinh 3\ .$$

Die Länge der Winkelhalbierenden zwischen null und drei ist $3\sqrt{2}$, die der seitlichen Begrenzungsstrecken

$$\cosh 0 - 0 = 1 \quad \text{und} \quad \cosh 3 - 3\ .$$

Der Gesamtumfang ist also

$$\sinh 3 + 3\sqrt{2} + 1 + \cosh 3 - 3 = e^3 + 3\sqrt{2} - 2 \approx 22{,}3281776\ .$$