WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

9. April 2003

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

2) Richtig oder falsch: $\mathcal{B} = \{x+2, x+3, x^2+4\}$ ist eine Basis des Vektorraums P_2 aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & \text{falls } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Was ist $\det A$?

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \end{cases}$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Für alle $a > 0$ ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{a}$

6) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ sei wirbelfrei, und γ sei eine ganz in D liegende geschlossene Kurve. Dann ist $\int_\gamma \vec{V}(x)\,dx = 0$.

7) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ für $\varphi(x,y,z) = x\sin y + y\cos z$?

8) Was ist $\int_\gamma \pi\,ds$ für das im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Quadrat γ mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*
V sei die Menge aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x mit der Eigenschaft $f(1) = 0$.

a) Zeigen Sie, daß V ein Vektorraum ist und finden Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f(x) \mapsto f'(x) - f'(1)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild dieser Abbildung!

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

e) Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung $\varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ\varphi\colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

f) Was ist A^4 ?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \quad ay + (1-a)z &= -3a \qquad (1)\\ 3x + (4-a)y - \quad z &= 4 \qquad (2)\\ x + \quad y - \quad 2az &= 1-6a \qquad (3) \end{aligned}$$

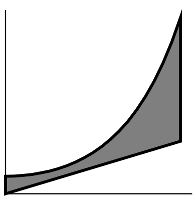
in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad drei für $f(x,y) = \sinh(x+y^2)$ um den Punkt $(0,0)$!

b) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x,y) = x^3 + y^2$ um den Punkt $(0,1)$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*



Das ebene Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ sei nach oben begrenzt durch die Kurve $y = \cosh x$, nach unten durch die Winkelhalbierende $y = x$ und nach den Seiten durch die Geraden $x = 0$ und $x = 3$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt (grau) von G!

b) Berechnen Sie den Umfang (schwarz) von G! *(Hinweis: Interpretieren Sie die Kurve $y = \cosh x$ als Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$!)*

Formelsammlung

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 9. April 2003, um 10^{15} Uhr