WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. September 2003

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = 1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Lösung: *Falsch,* denn an den Nullstellen von f hat g Pole.

2) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = 1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

Lösung: *Richtig:* In den Punkten, in denen $f(z)$ weder verschwindet noch einen Pol hat, ist $1/f$ nach der Kettenregel komplex differenzierbar, und für jede Null- oder Polstelle z_0 von f gibt es eine ganze Zahl k, so daß $a_k z^k$ Anfangsglied der LAURENT-Reihe von f ist; dann ist $(z-z_0)^{-k} \cdot f(z)$ holomorph in z_0 mit Funktionswert $a_k \neq 0$, d.h. $(z-z_0)^k/f(z)$ ist dort zumindest meromorph.

3) Richtig oder falsch: In der FOURIER-Reihe von $f(t) = e^{\sin t}$ gibt es sowohl Sinus- als auch Cosinusterme mit nichtverschwindenen Koeffizienten.

Lösung: *Richtig,* denn $f(-t) = e^{-\sin t} = 1/f(t)$ ist für fast alle t weder gleich $f(t)$ noch gleich $-f(t)$, also ist f weder gerade noch ungerade.

4) Richtig oder falsch: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat mindestens einen reellen Eigenwert.

Lösung: *Falsch;* die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat nur die beiden komplexen Eigenwerte $\pm i$.

5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn die partielle Ableitung $\dfrac{-1}{y^2}$ der rechten Seite nach y ist unabhängig von t stets gleich Eins, also insbesondere beschränkt, so daß wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können.

6) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ hat reelle Eigenwerte.

Lösung: *Falsch;* ihr charakteristisches Polynom $(i-\lambda)^2 - 1$ verschwindet für $i \pm 1$. (Die Matrix ist nicht HERMITEsch, da ihre Diagonaleinträge nicht reell sind.)

Aufgabe 1: **(***6 Punkte)*

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z+2i)(z+3i)}$?

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Da $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ ist, liegt für $R > 1$ liegt im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises genau ein Pol, nämlich $z_0 = i$. er hat die Ordnung eins und das Residuum des Integranden ist dort

$$\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z+2i)(z+3i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z+2i)(z+3i)} = \frac{1}{2i\cdot 3i\cdot 4i} = -\frac{1}{24i}.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z+2i)(z+3i)} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)(z+3i)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-1}{24i} = -\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)(z+3i)}\, dz = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(Re^{it}+2i)(Re^{it}+3i)}\, dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
$$\ddot y(t) + 2\dot y(t) + 5y(t) = 10\cos t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot y(t) + 2\dot y(t) + 5y(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2+2\lambda+5 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda+1)^2 + 4 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also
$$\lambda_{1/2} = -1 \pm 2i\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\ddot y(t) + 2\dot y(t) + 5y(t) = 0$ ist somit
$$y(t) = e^{-t}(a\cos 2t + b\sin 2t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, da die Differenz zweier Lösungen die homogene Gleichung erfüllt. Hier geht es um die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung; es sollte also eine spezielle Lösung geben, die mit der anregenden Frequenz schwingt. Der Ansatz

$$y(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$$

mit

$$\dot{y}(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t \quad \text{und} \quad \ddot{y}(t) = -\alpha \cos t - \beta \sin t$$

führt links auf

$$\begin{aligned} &-\alpha \cos t - \beta \sin t - 2\alpha \sin t + 2\beta \cos t + 5\alpha \cos t + 5\beta \sin t \\ &= \big((5-1)\alpha + 2\beta\big)\cos t + \big((5-1)\beta - 2\alpha\big)\sin t\,, \end{aligned}$$

was gleich der rechten Seite $10\cos t$ sein soll, d.h.

$$4\alpha + 2\beta = 10 \quad \text{und} \quad 4\beta - 2\alpha = 0\,.$$

Damit ist $\alpha = 2\beta$ und $(4 \cdot 2 + 2)\beta = 10$, also $\beta = 1$ und $\alpha = 2$. Die gesuchte reine Schwingung ist daher $2\cos t + \sin t$, und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist

$$y(t) = 2\cos t + \sin t + e^{-t}(a\cos 2t + b\sin 2t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle periodische Lösung $y(t) = 2\cos t + \sin t$.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f!

Lösung:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{3t}e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{(3-i\omega)t}\,dt = \left.\frac{e^{(3-i\omega)t}}{3-i\omega}\right|_0^1 \\ &= \frac{e^{3-i\omega}-1}{3-i\omega}\,. \end{aligned}$$

b) Geben Sie deren Betrag in einer rein reellen Form an!

Lösung:

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 &= \widehat{f}(\omega) \cdot \overline{\widehat{f}(\omega)} = \frac{e^{3-i\omega}-1}{3-i\omega} \cdot \frac{e^{3+i\omega}-1}{3+i\omega} \\ &= \frac{e^6 + 1 - e^3(e^{-i\omega} + e^{i\omega})}{9+\omega^2} = \frac{e^6 + 1 - 2e^3\cos\omega}{9+\omega^2}\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\widehat{f}(\omega)\right| = \sqrt{\frac{e^6 + 1 - 2e^3\cos\omega}{9+\omega^2}}\,.$$

c) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entstehe aus f durch Faltung mit sich selbst. Was ist die FOURIER-Transformierte von g?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte einer Faltung ist das Produkt der FOURIER-Transformierten der beiden gefalteten Funktionen, hier also das Quadrat von $\widehat{f}(\omega)$. Somit ist

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)^2 = \left(\frac{e^{3-i\omega} - 1}{3 - i\omega}\right)^2 .$$

d) Die Funktion $h(t)$ entstehe aus f durch periodische Fortsetzung der Werte auf dem Intervall $[0, 1)$ mit Periode eins auf $\mathbb{R}$; ihre FOURIER-Reihe sei $S_h(t)$. (Es ist *nicht* gefragt, wie $S_h(t)$ aussieht.) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $S_h(t)$!

Lösung: $h(t)$ ist überall stetig außer an den ganzzahligen Stellen. Dort springt $h(t)$ von $f(1) = e^3$ (rechtsseitiger Grenzwert) auf $f(0) = e^0 = 1$ (linksseitiger Grenzwert). Die FOURIER-Reihe konvergiert an solchen Stellen gegen das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte, also ist

$$S_h(t) = \begin{cases} h(t) = e^{\{t\}} & \text{falls } t \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1+e^3}{2} & \text{falls } t \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

wobei $\{t\} = t - [t]$ den gebrochenen Anteil von t bezeichnet.

e) Wo tritt bei der Konvergenz von $S_h(t)$ das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: An den Unstetigkeitsstellen, also, wie gerade diskutiert, für alle ganzahligen Werte von t.

Aufgabe 4: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(1+\lambda) + 1 + \lambda = (1-\lambda^2)(1+\lambda) \\ &= (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{aligned}$$

nach der SARRUSschen Regel.

Es gibt also den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins, sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit zwei.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren müssen wir die homogenen linearen Gleichungssysteme mit den Matrizen

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - \lambda_2 E = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Vektor mit Komponenten x, y, z ist somit Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wenn die drei Gleichungen

$$-x + z = 0, \quad x - y + z = 0 \quad \text{und} \quad y - 2z = 0$$

erfüllt sind. Nach der ersten Gleichung muß $x = z$ sein und damit, sowohl nach der zweiten als auch nach der dritten, $y = 2x$. Basisvektor des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist also beispielsweise $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = -1$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$x + z = 0, \quad x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad y = 0,$$

der Lösungsraum ist also eindimensional und wird aufgespannt vom Vektor $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist daher nur eins.

c) Finden Sie eine Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, bezüglich derer die Matrix A eine Dreiecksgestalt M annimmt, und berechnen Sie (nur) die Matrix e^{Mt} für beliebiges $t \in \mathbb{R}$!

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu λ_2.
Da $(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist, haben wir für dessen Komponenten nur die eine Gleichung $x + 2y + z = 0$; eine von $\vec{e}_2$ linear unabhängige Lösung ist beispielsweise $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für diesen Vektor ist

$$A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_2\,;$$

bezüglich der Basis aus $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ hat A also die Dreiecksgestalt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erwartungsgemäß kommutieren N und D, d.h.

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) + z(t) \quad \text{und} \quad \dot{z}(t) = -z(t)\,!$$

Lösung: In Matrixschreibweise wird das Differentialgleichungssystem zu

$$\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also die Matrix e^{At} berechnen.
A ist bereits eine Dreiecksmatrix und hat lauter minus Einsen in der Hauptdiagonalen; da skalare Vielfache der Einheitsmatrix mit jeder anderen Matrix kommutieren, ist also

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bereits die Zerlegung von A in eine Diagonalmatrix und eine damit kommutierende obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Wegen $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $N^k = 0$ für $k > 2$ ist

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{-t}\left(E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -t & -t-\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & x-t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die sämtlichen Lösungen des Differentialgleichungssystems entsteht daraus durch Multiplikation mit den Vektoren aus $\mathbb{R}^3$; die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = e^{-t}(a - (b+c)t - \frac{c}{2}t^2), \quad y(t) = e^{-t}(b + ct) \quad \text{und} \quad z(t) = ce^{-t}$$

mit beliebigen reellen Zahlen a, b, c.

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = y(0) = 0$ und $z(0) = 1$!

Lösung: Das ist der Spezialfall $a = b = 0$ und $c = 1$, d.h.

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}, \quad y(t) = -te^{-t} \quad \text{und} \quad z(t) = e^{-t}.$$

c) Wir verhält sich dessen Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da $\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{-t}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ verschwindet, geht sie gegen den Nullvektor.

d) Ist diese Lösung stabil gegenüber Variationen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Aus demselben Grund: Ja, denn jede Lösung des Differentialgleichungssystem konvergiert für $t \to \infty$ gegen den Nullvektor.