Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

24. September 2003

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = 1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

2) Richtig oder falsch: Für eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist auch die Funktion g mit $g(z) = 1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

3) Richtig oder falsch: In der Fourier-Reihe von $f(t) = e^{\sin t}$ gibt es sowohl Sinus- als auch Cosinusterme mit nichtverschwindenen Koeffizienten.

4) Richtig oder falsch: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat mindestens einen reellen Eigenwert.

5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

6) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ hat reelle Eigenwerte.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z+2i)(z+3i)}$?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
$$\ddot y(t) + 2\dot y(t) + 5y(t) = 10\cos t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f !

b) Geben Sie deren Betrag in einer rein reellen Form an!

c) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entstehe aus f durch Faltung mit sich selbst. Was ist die Fourier-Transformierte von g ?

d) Die Funktion $h(t)$ entstehe aus f durch periodische Fortsetzung der Werte auf dem Intervall $[0, 1)$ mit Periode eins auf $\mathbb{R}$; ihre Fourier-Reihe sei $S_h(t)$. (Es ist *nicht* gefragt, wie $S_h(t)$ aussieht.) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $S_h(t)$!

e) Wo tritt bei der Konvergenz von $S_h(t)$ das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

c) Finden Sie eine Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, bezüglich derer die Matrix A eine Dreiecksgestalt M annimmt, und berechnen Sie (nur) die Matrix e^{Mt} für beliebiges $t \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) + z(t) \quad \text{und} \quad \dot{z}(t) = -z(t)\,!$$

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = y(0) = 0$ und $z(0) = 1$!

c) Wir verhält sich dessen Lösung für $t \to \infty$?

d) Ist diese Lösung stabil gegenüber Variationen der Anfangsbedingungen?

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Die Lösungen werden im Laufe des Tages im Netz erscheinen unter `http://hilbert.math.uni-mannheim.de/HM2/`