Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

27. März 2002

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\left\{\binom{1}{i}, \binom{-i}{1}\right\}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Falsch,* denn $\binom{1}{i}\binom{-i}{1} = 1 \cdot \overline{(-i)} + i \cdot \overline{1} = i + i = 2i \neq 0$.
Das folgt auch daraus, daß der zweite Vektor das i-fache des ersten ist, so daß es sich nicht einmal um eine Basis handelt.

2) Richtig oder falsch: Die Fourier-Reihe von $f(t) = |\sin t + \cos t|$ enthält keine Sinusterme.

Lösung: *Falsch,* denn sonst müßte die Funktion gerade sein. Für $t = \frac{\pi}{4}$ beispielsweise ist aber $\sin t = \cos t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d.h. $f(t) = \sqrt{2}$ und $f(-t) = 0$.

3) Zeigen Sie: Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $(f+g)*(f-g) = f*f - g*g$!

Lösung: Die Fourier-Transformierte der linken Seite ist

$$\widehat{f+g} \cdot \widehat{f-g} = \big(\widehat{f} + \widehat{g}\big)\big(\widehat{f} - \widehat{g}\big) = \widehat{f} \cdot \widehat{f} - \widehat{g} \cdot \widehat{g}\,,$$

die der rechten $\widehat{f*f} - \widehat{g*g} = \widehat{f} \cdot \widehat{f} - \widehat{g} \cdot \widehat{g}$ auch; da die Fourier-Transformation einen Isomorphismus $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert, folgt die Behauptung.
Sie folgt natürlich auch durch Nachrechnen über die Definition einer Faltung oder durch Ausmultiplizieren nach den beiden aus der Vorlesung bekannten Tatsachen, daß Faltung linear und kommutativ ist.

4) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3y(t)^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch;* $y(t) = t^3$ und $y(t) = 0$ sind zwei verschiedene Lösungen.
Es reicht nicht, nur zu zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes von Picard und Lindelöf nicht erfüllt sind, denn der sagt nur etwas über eine *hinreichende* Bedingung.

5) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix} -i & 2i \\ 2i & -i \end{pmatrix}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

Lösung: *Falsch,* denn offensichtlich ist i ein Eigenwert. (Die Matrix ist zwar symmetrisch, nicht aber Hermitesch.) Es reicht allerdings nicht, wenn man nur erkannt hat, daß die Matrix nicht Hermitesch ist (Dafür gab es nur einen Punkt.), denn die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist auch nicht Hermitesch, hat aber trotzdem nur die beiden reellen Eigenwerte zwei und drei.

6) Richtig oder falsch: Die Zahlen $\left(\cos\frac{k}{10}, \tan\frac{k}{10}\right)$ für $1 \leq k \leq 10$ sind positiv korreliert.

Lösung: *Falsch;* da der Cosinus in $[0, 1]$ monoton fällt, der Tangens aber monoton wächst, sind die Paare negativ korreliert.

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) + y(t) = e^t$ mit $y(0) = 0$!

Lösung: Die homogene Gleichung $\dot{y}(t) + y(t) = 0$ oder $\dot{y}(t) = -y(t)$ hat offensichtlich die Lösungen $y(t) = Ce^{-t}$ für beliebiges $C \in \mathbb{R}$. Zum Erraten einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung können wir es mit dem Ansatz $y(t) = ae^t$ probieren, der gut zur rechten Seite paßt; dann ist

$$\dot{y}(t) + y(t) = ae^t + ae^t = 2ae^t ,$$

für $a = \frac{1}{2}$ haben wir also eine Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + Ce^{-t} .$$

Für $t = 0$ ist $y(0) = \frac{1}{2} + C$, das gegebene Anfangswertproblem wird also gelöst durch

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t .$$

Der am häufigsten in der Klausur benutzte Lösungsweg bwar über LAPLACE-Transformationen: Ist $y(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so zeigt LAPLACE-Transformation der Differentialgleichung, daß

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = (s+1)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^t\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-1) = \frac{1}{s-1}$$

ist, d.h.

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2-1} .$$

Nun sieht man entweder über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right) ,$$

daß

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \sinh t$$

ist, oder aber man erinnert sich, daß $\frac{1}{s^2-1}$ die LAPLACE-Transformierte des *sinus hyperbolicus* ist.

Auch mit Variation der Konstanten oder mit der Lösungsformel für eine inhomogene lineare Differentialgleichung kommt man ans Ziel.

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Wie $\frac{1}{2}e^t$, sie geht also gegen unendlich.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

$f(t)$ sei die Rechteckschwingung mit Periode 2π, für die gilt $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die LAPLACE-Transformierte von f, und geben Sie diese in möglichst kompakter Form an!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{e^{-2k\pi s} - e^{-(2k+1)\pi s}}{s}\right) = \frac{1-e^{-\pi s}}{s}\sum_{k=0}^\infty e^{-2k\pi s} = \frac{1-e^{-\pi s}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \\
&= \frac{1-e^{-\pi s}}{s(1-e^{-2\pi s})} = \frac{1-e^{-\pi s}}{s(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})} = \frac{1}{s(1+e^{-\pi s})}
\end{aligned}
$$

nach der Summenformel für die geometrische Reihe und der dritten binomischen Formel. Der häufigste Fehler bei dieser Aufgabe war, daß die Periodizität von f nicht beachtet wurde und daher bei der LAPLACE-Transformation nur von 0 bis π integriert wurde. Außerdem haben erstaunlich viele das LAPLACE-Integral mit Grenzen $\pm\infty$ angesetzt.

b) Laut Vorlesung ist die FOURIER-Reihe von f die Reihe

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}\,.$$

Wo und wie unterscheidet sich $S_f(t)$ von $f(t)$? Wo tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Falls f in einem Punkt t stetig ist, stimmen $f(t)$ und $S_f(t)$ dort überein; bei Sprungstellen ist $f(t)$ das arithmetische Mittel aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert. Unser f springt bei allen ganzzahligen Vielfachen von π, wobei jeweils einer der beiden Grenzwerte null und der andere eins ist, d.h.

$$S_f(k\pi) = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } k\in\mathbb{Z}\,,\ \text{aber} \quad f(k\pi) = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } k \\ 1 & \text{für ungerade } k \end{cases}.$$

In allen anderen Punkten ist $S_f(t) = f(t)$.

c) Bestimmen Sie die komplexe FOURIER-Reihe von f und, gegebenenfalls unter Verwendung von DIRAC-„Funktionen“, die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
S_f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{(2k+1)it} - e^{-(2k+1)it}}{2i\cdot(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{(2k+1)it}}{2k+1} - \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)it}}{2k+1} = \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikt}
\end{aligned}
$$

mit $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{für } k\neq 0 \text{ gerade} \\ \frac{1}{k\pi i} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}.$

Die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ existiert natürlich nicht als Funktion im üblichen Sinne: Die einzigen Frequenzen, die beim Aufbau von $f(t)$ eine Rolle spielen, sind ganzzahlige Vielfache von π, wobei der Vorfaktor entweder ungerade ist oder verschwindet.

Um $\widehat{f}(\omega)$ als verallgemeinerte Funktion (d.h. mit DIRAC-Distributionen) darzustellen, gehen wir aus von der Formel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

die bei Existenz von $\widehat{f}(\omega)$ für fast alle t gilt. Der Vergleich mit der komplexen Form der FOURIER-Reihe zeigt

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\delta\big(\omega-(2k+1)\big)-\frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\delta\big(\omega+(2k+1)\big)\right)\\ &= \pi-2i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\delta\big(\omega-(2k+1)\big)+2i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\delta\big(\omega+(2k+1)\big)\,.\end{aligned}$$

Da $\widehat{f}(\omega)$ nicht als Funktion exisitiert, sondern nur über obige Integraldarstellung definiert werden kann, ist diese Darstellung nicht eindeutig; man könnte noch eine beliebige (echte) Funktion addieren, die nur auf einer Nullmenge von null verschieden ist.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Berechnen Sie für $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ die Matrix e^A !

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)(3-\lambda)$, die Eigenwerte sind also 1 und 3, beide mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit eins. Eigenvektor zum Eigenwert eins ist natürlich der erste Einheitsvektor $\vec{b}_1=\binom{1}{0}$ des $\mathbb{R}^2$, denn der steht in der ersten Spalte der Matrix und wird daher auf sich selbst abgebildet. Fast genauso einfach sieht man anhand der Matrix

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ \text{daß}\quad \vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert drei ist. Bezüglich der Basis aus $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ hat A also die Diagonalgestalt

$$D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad e^D=\begin{pmatrix}e&0\\0&e^3\end{pmatrix}\,.$$

Die durch e^D bezüglich der Basis aus $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ vermittelte Abbildung bildet daher $\vec{b}_1$ auf $e\cdot\vec{b}_1$ ab und $\vec{b}_2$ auf $e^3\cdot\vec{b}_2$. Der zweite Vektor $\binom{0}{1}=\vec{b}_2-\vec{b}_1$ aus der Standardbasis wird somit auf

$$e^3\cdot\vec{b}_2-e\cdot\vec{b}_1=\begin{pmatrix}e^3-e\\e^3\end{pmatrix}$$

abgebildet; Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis ist also

$$e^A=\begin{pmatrix}e&e^3-e\\0&e^3\end{pmatrix}\,.$$

Bemerkung: Wer lieber formal mit der Matrix des Basiswechsels rechnet, kommt natürlich auf dasselbe Ergebnis: Die Matrix des Basiswechsels ist $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ mit $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. Probleme bekommt nur, wer versucht, die Formel

$$e^{D+N}=e^D\cdot e^N\quad\text{auf}\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad N=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

anzuwenden, denn diese Formel gilt nur, wenn D und N kommutieren. Das ist üblicherweise nur dann der Fall, wenn man die Matrix (im Gegensatz zu A) so in Blöcke um die Diagonale zerlegen kann, daß in jedem Block alle Diagonalelemente gleich sind. In der Tat ist hier

$$D\cdot N=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&6\\0&0\end{pmatrix}=N\cdot D$$

und

$$e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e & 2e \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \neq e^A \neq \begin{pmatrix} e & 2e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} = e^N \cdot e^D .$$

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Da die Matrix bereits die Art von Dreiecksgestalt hat, die wir von einer Basis aus Hauptvektoren erwarten, gibt es bei *a)* und *b)* nichts zu rechnen: Man sieht mit bloßem Auge die beiden Eigenwerte minus eins und eins in der Diagonalen stehen; minus eins hat offensichtlich die algebraische Vielfachheit zwei und eins hat algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins. Der erste Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$ ist Eigenvektor zu -1 und der dritte zu $+1$. Daß minus eins nur geometrische Vielfachheit eins hat, ist aufgrund der Gestalt der Matrix A eigentlich auch klar; wer damit Schwierigkeiten hat, sieht es spätestens daran, daß die Matrix

$$A - (-E) = A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

offensichtlich Rang zwei hat. Ihr Quadrat hat in der rechten unteren Ecke eine Vier stehen und enthält sonst lauter Nullen; als Hauptvektor der Stufe zwei können wir also den zweiten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$ nehmen, so daß die in *b)* gesuchte Basis einfach die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At}!

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist Summe einer Diagonalmatrix D und einer oberen Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Diese beiden Matrizen kommutieren, denn die Eins aus der Matrix N steht in einem Zweierblock, in dem alle Diagonalelemente von D gleich sind. Da N^2 die Nullmatrix ist (N bildet den ersten Basisvektor ab auf den zweiten und die beiden anderen auf den Nullvektor, d.h. N^2 bildet alles auf null ab), ist

$$e^{Nt} = E + Nt = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

d) Finden Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$!

Lösung: Um Indizes zu vermeiden, schreiben wir $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$; dann ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+bt)e^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{t} \end{pmatrix}$$

die Lösung mit $x(0) = a$, $y(0) = b$ und $z(0) = c$. Dabei können a, b, c beliebige reelle Zahlen sein.

e) Für welche Anfangsbedingungen $x(0) = a,\ y(0) = b,\ z(0) = c$ bleiben die Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

Lösung: e^{-t} und te^{-t} bleiben für $t \to \infty$ beschränkt (sie gehen sogar gegen null), nur e^{t} wächst über alle Grenzen. Daher bleibt die Lösung genau im Fall $c = 0$ beschränkt.

f) Wann sind die bei *e)* auftretenden Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nie! Sobald c auch nur minimal von null verschieden ist, dominiert auf lange Sicht die z-Komponente und zieht die Lösung ins Unendliche.

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Zeigen Sie: $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$

Lösung: Nach den EULERschen Formeln ist

$$\sin t \cos t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i} = \frac{1}{2} \sin 2t\,.$$

b) Zeigen Sie: Die Funktion $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ ist monoton fallend in $[0, \pi]$.
Ist h gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: Eine Funktion ist monoton fallend, wenn ihre Ableitung im betrachteten Intervall nirgends positiv wird.

$$\dot{h}(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

hat für $t \neq 0$ dasselbe Vorzeichen wie der Zähler; der verschwindet für $t = 0$ und hat für $t = \pi$ den Wert $-\pi$. Bevor wir ihn durch eine Kurvendiskussion genauer untersuchen, lohnt es sich also, zu schauen, ob er vielleicht monoton fällt: Da seine Ableitung

$$-t \sin t + \cos t - \cos t = -t \sin t$$

in $[0, \pi]$ in der Tat nirgends positiv wird, ist das der Fall. Also ist $\dot{h}(t)$ in $(0, \pi]$ nirgends positiv und, als stetige Funktion, somit auch in $[0, \pi]$. Also ist $h(t)$ dort monoton fallend. Als Quotient zweier ungerader Funktionen ist h natürlich gerade:

$$h(-t) = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t} = h(t)\,.$$

c) Bestimmen Sie alle (relativen) Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

Lösung: Der Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x \cos x \\ -2\sin y \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2x \\ -\sin 2y \end{pmatrix} \quad \textit{(nach a))}$$

verschwindet genau dann, wenn x und y halbzahlige Vielfache von π sind. Da $\frac{\pi}{2} > 1$ ist, kommt unter der angegebenen Nebenbedingung hierfür nur der Nullpunkt in Frage. Dort ist $h(0,0) = 2$ in der Tat ein (absolutes) Maximum der Funktion, denn ein Cosinus kann nirgends größer als eins werden.
Bleiben die Extrema auf dem Rand $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Da $\nabla g = \binom{2x}{2y}$ dort nirgends verschwindet, muß es für jedes solche Extremum ein λ geben, so daß

$$\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y) \qquad \text{oder} \qquad \sin 2x = -\lambda \cdot 2x \quad \text{und} \quad \sin 2y = -\lambda \cdot 2y$$

ist. $x = 0$ und $y = 0$ erfüllen jeweils eine der beiden Gleichungen; die jeweils andere Koordinate muß dann wegen der Nebenbedingung Betrag eins haben, wir haben also die vier Kandidaten $(0,1)$, $(0,-1)$ $(1,0)$ und $(-1,0)$. In allen vier Punkten ist

$$h(x,y) = \cos^2 0 + \cos^2 1 = 1 + \cos^2 1\,.$$

Falls weder x noch y verschwinden, ist

$$-\lambda = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2y}{2y}\,;$$

wegen *b)* ist also $x = \pm y$. Auf Grund der Nebenbedingung haben dann beide Koordinaten den Betrag $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wir bekommen somit vier weitere Kandidaten $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. In diesen vier Punkten ist $h(x,y) = 2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Weitere Kandidaten gibt es nicht; da die stetige Funktion h auf der kompakten Kreislinie sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annehmen muß, hat h also bei einer der beiden Viergruppen Maxima und bei der anderen Minima.
Wir müssen somit nur noch herausfinden, welcher der beiden Funktionswerte größer ist; das kann jeder gute Taschenrechner.
Für Puristen sei auch eine Lösung angegeben, die ohne auskommt:
Da π zwischen drei und vier liegt, ist

$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} > \cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1 > \frac{1}{2}\,,$$

also

$$1\frac{1}{4} < 1 + \cos^2 1 < 1\frac{1}{2}\,.$$

(Zur Erinnerung: $\frac{\pi}{4}$ entspricht 45° und $\frac{\pi}{3}$ ist im Winkelmaß 60°.)
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ liegt in der Nähe von $\frac{\pi}{4}$, also sollte $\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ungefähr bei $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ liegen, d.h.

$$2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

sollte kleiner sein als $1 + \cos^2 1$. Nach der TAYLOR-Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

des Cosinus ist $\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{2^2\cdot 4!} - \frac{1}{2^3\cdot 6!} + \cdots\,.$

Da der Betrag der Summanden monoton fallend ist, muß jede Summe aus einem negativen und dem darauffolgenden positiven Summanden negativ sein, d.h.

$$\cos\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 24} = \frac{4\cdot 24 - 24 + 1}{4\cdot 24} = \frac{73}{96}\,.$$

Um zu sehen, daß $2\cdot\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 + \cos^2 1$ ist, reicht es somit, wenn wir zeigen, daß

$$\left(\frac{73}{96}\right)^2 < \frac{5}{8}$$

ist. Diese Behauptung ist äquivalent zu

$$8\cdot 73^2 < 5\cdot 96^2 \quad\text{oder}\quad 2\cdot 73^2 < 5\cdot 48^2 \quad\text{oder}\quad 10658 < 11520\,,$$

also richtig – ganz in Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten

$2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}1559436947653744734546479789085896416244472503913053568904102677$
und
$1+\cos^2 1 \approx 1{,}2919265817264288065012158852496189051169996144622275546224250131\,.$

Damit gibt es in den Punkten $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ auf dem Rand relative Maxima und in den Punkten $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ relative Minima, die gleichzeitig absolute Minima sein müssen.