WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

26. September 2001

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je **zwei** Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Reihe von $f(t) = \cos^3 t$ enthält keine Sinusterme.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ordne jedem Vektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^3$ jene Lösung $\binom{x(t)}{y(t)}$ des linearen Differentialgleichungssystems $\binom{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = A\binom{x(t)}{y(t)}$ zu, für die $x(0) = a$ und $y(0) = b$ ist ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$). Dann ist φ eine lineare Abbildung.

3) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t)^2 = 4y(t)$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

4) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ symmetrisch, HERMITEsch, beides oder keins von beiden?

5) Richtig oder falsch: Die Zahlen (k, e^{-k}) für $1 \le k \le 10$ sind positiv korreliert.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $t \in (-\pi, \pi]$ sei

$$f(t) = e^t - e^{-t}\,.$$

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade, beides oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen $f(t)$?

e) An welchen Punkten tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 2(\cos t - \sin t)$$

mit $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$!

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?
Hinweis: Falls Sie mit LAPLACE-Transformierten arbeiten, können Sie die Formeln

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{t^n e^{\lambda t}\}(s) = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$$

voraussetzen.

Aufgabe 3: (*7 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

d) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - z(t) && \text{mit} \quad x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= y(t) && \text{mit} \quad y(0) = 2\ ! \\ \dot{z}(t) &= x(t) - y(t) && \text{mit} \quad z(0) = 3 \end{aligned}$$

e) Für welche alternativen Anfangsbedingungen $x(0) = a,\ y(0) = b,\ z(0) = c$ bleiben die Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

f) Wann sind die bei *e)* auftretenden Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 4: (*3 Punkte*)

Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$!

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?