WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. Februar 2003

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = \tan z$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion.

Lösung: *Richtig,* denn $\cos z$ und $\sin z$ sind holomorphe Funktionen, und die Nullstellen des Cosinus führen wegen $\lim\limits_{z\to(k+\frac12)\pi} \frac{z-(k+\frac12)\pi}{\cos z} = \lim\limits_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left((w+(k+\frac12)\pi\right)} = \lim\limits_{w\to 0} \frac{w}{(-1)^k \sin w} = \pm 1$ nur zu Polen erster Ordnung.

2) Was ist $\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

Lösung: Die einzige Polstelle in der Einheitskreisscheibe ist bei $z = 0$; wegen der TAYLOR-Reihe $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \cdots$ hat $1/\sin z$ dort das Residuum eins, das Integral ist also $2\pi i$.

3) Was ist $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

Lösung: Nach der CAUCHYschen Integralformel ist das $2\pi i \cdot \cos 0 = 2\pi i$; nach dem Residuensatz natürlich auch.

4) Richtig oder falsch: $e^{\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}e^t & 2te^t\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$

Lösung: *Falsch;* da $\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$ die beiden verschiedenen Eigenwerte eins und zwei hat, ist die Matrix diagonalisierbar; in der Exponentialmatrix können also keine Terme wie te^t auftreten. (Die Matrizen $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ kommutieren nicht!)

5) Richtig oder falsch: Die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 1-i & 1\end{pmatrix}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

Lösung: *Falsch;* offensichtlich ist $\lambda = i$ ein Eigenwert. (Die Matrix ist zwar symmetrisch, nicht aber HERMITEsch.)

6) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 5y(t)^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch:* $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^5$ sind zwei verschiedene Lösungen.

7) Richtig oder falsch: $\dot y(t) = \sin y(t)$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn die Ableitung $\cos y$ von $\sin y$ ist beschränkt, so daß die rechte Seite einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt; der Satz von PICARD-LINDELÖF ist also anwendbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$!

Lösung: Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 3$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = 2i$ und $z_2 = 3i$; beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \lim_{z\to z_\nu} \frac{(z-z_\nu)(z^2-1)}{(z^2+4)(z^2+9)}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)} &= \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z^2-1)}{(z^2+4)(z^2+9)} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z^2-1)}{(z-2i)(z+2i)(z^2+9)}\\ &= \lim_{z\to 2i} \frac{(z^2-1)}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{(2i)^2-1}{(2i+2i)\big((2i)^2+9\big)} = \frac{-5}{4i\cdot 5} = \frac{i}{4}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)} &= \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)(z^2-1)}{(z^2+4)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)(z^2-1)}{(z^2+4)(z+3i)(z-3i)}\\ &= \lim_{z\to 2i} \frac{(z^2-1)}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{(3i)^2-1}{(3i+3i)\big((3i)^2+4\big)} = \frac{-10}{6i\cdot(-5)} = -\frac{i}{3}\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)} + \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)}\right)\\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{4} - \frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{6}\,.\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz = \int_0^\pi \frac{(R^2e^{2it}-i)\cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+4)(R^2e^{2it}+9)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0,\pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

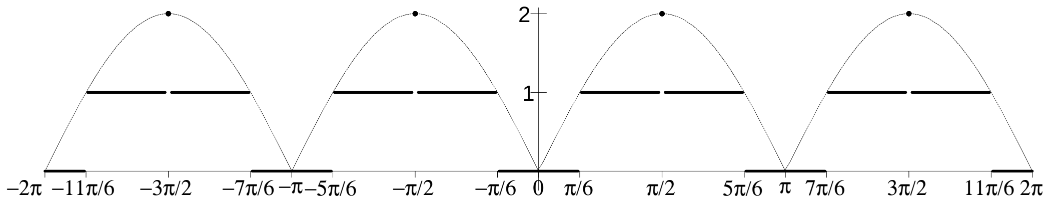
Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \big[2\,|\sin t|\big]$, wobei $[x]$ für jede reelle Zahl x die größte ganze Zahl $z \le x$ bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Welche Periode hat f ? Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da $|\sin t|$ eine gerade Funktion mit Periode π ist, gilt dasselbe auch für f. Im Periodenintervall $[0,\pi]$ nimmt f im Mittelteil $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ abgesehen vom Punkt $\frac{\pi}{2}$ überall den Wert eins an, $f(\frac{\pi}{2}) = 2$, und außerhalb des Mittelteils ist $f(t) = 0$. Damit ergibt sich folgendes Bild (dünn eingezeichnet $2\,|\sin t|$):



c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme. Zur Berechnung des konstanten Terms sowie der Koeffizienten der Cosinusterme können wir über *irgendein* Periodenintervall integrieren, beispielsweise über das von $\frac{\pi}{6}$ bis $\frac{7\pi}{6}$. Da der isolierte Wert $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ bei der Integration keine Rolle spielt, können wir davon ausgehen, daß f von $\frac{\pi}{6}$ bis $\frac{5\pi}{6}$ den Wert eins hat und im restlichen Teil des Intervalls verschwindet; somit ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/6}^{7\pi/6} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} dt = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

und für $k > 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{7\pi/6} f(t)\cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos 2kt\,dt = \frac{2}{2k\pi}\left(\sin\frac{10k\pi}{6} - \sin\frac{2k\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{k\pi}\left(\sin\frac{5k\pi}{3} - \sin\frac{k\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Der Wert von $\sin\frac{k\pi}{3}$ hängt nur ab von k modulo sechs und ergibt sich mit Hilfe des Formelanhangs zur Klausur aus folgender Tabelle:

$k \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
$\sin\frac{k\pi}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$5k \bmod 6$	0	5	4	3	2	1
$\sin\frac{5k\pi}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Damit ist $a_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{k\pi} & \text{falls } k \equiv 1,2 \bmod 6 \\ \frac{\sqrt{3}}{k\pi} & \text{falls } k \equiv 4,5 \bmod 6 \end{cases}$, und die FOURIER-Reihe von f ist

$$S_f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2kt = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k=1\\ k\not\equiv 0 \bmod 3}}^{\infty} \varepsilon_k \frac{\sqrt{3}}{k\pi}\cos 2kt \quad \text{mit} \quad \varepsilon_k = \begin{cases} -1 & \text{falls } k \equiv 1,2 \bmod 6 \\ 1 & \text{falls } k \equiv 4,5 \bmod 6 \end{cases}.$$

In geschlossener Form ist $S_f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k=1\\ k\not\equiv 0 \bmod 3}}^{\infty} (-1)^{[\frac{k+2}{3}]} \frac{\sqrt{3}}{k\pi}\cos 2kt$.

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Die FOURIER-Reihe konvergiert zumindest überall dort gegen $f(t)$, wo f stetig ist; dies ist im Intervall $[0, \pi]$ in genau drei Punkten nicht der Fall: Bei $t = \pi/6$, bei

$t = 5\pi/6$ und bei $t = \pi/2$. An diesen Stellen konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert; das ist für $t = \pi/2$ gleich eins, da die Funktion sowohl links als auch rechts von $\pi/2$ gleich eins ist; an den beiden anderen Stellen ist es $1/2$. Beliebige $t \in \mathbb{R}$ lassen sich als $t = k\pi + \tau$ mit $\tau \in [0, \pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben; die Reihe verhält sich bei t genauso wie bei τ.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Dafür kommen nur die in *d)* bestimmten Unstetigkeitsstellen in Frage; bei $\pi/2$ allerdings ist $S_f(t)$ im Gegensatz zu $f(t)$ stetig, so daß hier kein GIBBS-Phänomen auftritt. Bei $t = \pi/6$ und $t = 5\pi/6$ gibt es echte Sprünge; dort tritt es auf, und genauso bei allen Punkten der Form $k\pi \pm \pi/6$ mit $k \in \mathbb{Z}$..

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = te^{-t^2}$!

Lösung: Die FOURIER-Transformierte von $g(t) = e^{-t^2}$ ist laut Formelanhang am Ende der Klausur $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$; die Ableitung $\dot{g}(t) = -2te^{-t^2}$ hat somit FOURIER-Transformierte $i\omega\widehat{g}(\omega) = i\omega\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$. Da $f(t) = -\frac{1}{2}\dot{g}(t)$ ist, folgt $\widehat{f}(\omega) = -\dfrac{i\sqrt{\pi}\,\omega}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Faltung $h = f * g$ von $f(t) = e^{-t^2}$ und $g(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1)$!

Lösung:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-s)^2}\big(\delta(s-1) + \delta(s+1)\big)\,ds \\ &= e^{-(t-1)^2} + e^{-(t+1)^2} . \end{aligned}$$

b) Welche FOURIER-Transformierte hat $h(t)$? Ist dies eine reellwertige Funktion?

Lösung: Laut Formelanhang ist $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$, und

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-1) + \delta(t+1)\big)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega} + e^{i\omega} = 2\cos\omega .$$

Also ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega) = 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}\cos\omega$, und das ist natürlich eine reellwertige Funktion.

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Entwicklung nach der vierten Zeile (oder Spalte) gefolgt von Entwicklung nach der zweiten Zeile (oder Spalte) ergibt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2\big((-1-\lambda)(3-\lambda) + 4\big) = (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 . \end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit zwei. $\lambda_2 = 2$ hat offensichtlich den zweiten und den vierten Koordinateneinheitsvektor als Eigenvektoren; damit ist hier auch die geometrische Vielfachheit gleich zwei.

Für $\lambda_1 = 1$ müssen wir rechnen: Die Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Eigenvektors müssen das lineare Gleichungssystem

$$-2x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad -4x_1 + 2x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_4 = 0$$

erfüllen, d.h. $x_2 = x_4 = 0$ und $x_3 = 2x_1$. Damit ist der Eigenraum nur eindimensional, die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts also gleich eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn es gibt keine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Eine Dreiecksgestalt erhalten wir bezüglich einer Basis aus Eigen- und Hauptvektoren. Für $\lambda_1 = 1$ haben wir nur einen linear unabhängigen Eigenvektor, z.B.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

wir brauchen also noch einen Hauptvektor zweiter Stufe.

$$(A - 1)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß für jeden Vektor aus dem Hauptraum die zweite und die vierte Komponenten verschwinden müssen; eine von $\vec{v}_1$ linear unabhängige Lösung ist beispielsweise

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die noch fehlenden beiden Basisvektoren nehmen wir eine Basis des Eigenraums zm Eigenwert zwei, also z.B. $\vec{v}_3 = \vec{e}_2$ und $\vec{v}_4 = \vec{e}_4$, wobei $\vec{e}_i$ den i-ten Vektor aus der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ bezeichnet. Für die Dreiecksgestalt fehlt nun nur noch das Bild von $\vec{v}_2 = \vec{e}_3$; es ist die dritte Spalte der Matrix A, also

$$A\vec{v}_2 = A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 .$$

Bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ hat A also die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die Matrix $e^{\Delta t}$!

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix und da nach der allgemeinen Theorie $DN = ND$ ist, folgt

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Zeigen Sie, daß das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ genau eine beschränkte Lösung hat!

Lösung: Da alle Eigenwerte der Matrix positiv sind, ist die Nullösung die einzige beschränkte Lösung.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 2y(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = -3y(t) + 2z(t), \quad \dot{z}(t) = -3z(t)\,!$$

Lösung: In Matrixschreibweise ist dies das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

wir müssen e^{At} berechnen. Dazu schreiben wir

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = -3E \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

da skalare Vielfache der Einheitsmatrix mit jeder Matrix vertauschbar sind, ist natürlich $DN = ND$. Außerdem ist

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und aller höheren Potenzen von N verschwinden, d.h. $e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}Nt^2$. Damit ist

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = \left(e^{-3t}E\right) \begin{pmatrix} 1 & 2t & t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 2te^{-3t} & (t + 2t^2)e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} & 2te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + (2y_0 + z_0)t + 2z_0 t^2\right)e^{-3t} \\ y(t) &= (y_0 + 2z_0 t)e^{-3t} \\ z(t) &= z_0 e^{-3t} \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Diese Konstanten sind die Werte der drei Lösungsfunktionen an der Stelle null.

b) Bestimmen Sie die Lösung, die den Anfangsbedingungen $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ und $z(0) = -1$ genügt!

Lösung: Einsetzen von $x_0 = 5, y_0 = 2$ und $z_0 = -1$ in obige Lösung ergibt

$$x(t) = \left(5 + 5t - 2t^2\right)e^{-3t}, \quad y(t) = (2 - t)e^{-3t} \quad \text{und} \quad z(t) = -e^{-3t}\,.$$

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 4\cos t - 4\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = \ddot{y}(0) = 0, \;\; \dot{y}(0) = 2\,!$$

Lösung: Zwei Möglichkeiten bieten sich an: Entweder wir lösen zunächst *b)*, wo wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erraten müssen, oder wir lösen *a)* direkt via LAPLACE-Transformation. Letzteres ergibt für $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) &= s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3Y(s) - 2s \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 2 \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) \end{aligned}$$

die Beziehung $(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)Y(s) - 2s - 6 = \dfrac{4s-4}{s^2+1}$ oder

$$(s+1)^3Y(s) = \frac{4s-4}{s^2+1} + 2s + 6 = \frac{2s^3 + 6s^2 + 6s + 2}{s^2+1} = \frac{2(s+1)^3}{s^2+1}\,.$$

Damit ist $Y(s) = \dfrac{2}{s^2+1}$ und $y(t) = 2\sin t$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 4\cos t - 4\sin t\,!$$

Lösung: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$ hat die dreifache Nullstelle $\lambda = -1$; die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist also $y(t) = (C_1 + C_2t + c_3t^2)e^{-t}$ mit beliebigen $C_i \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung entsteht daraus durch Addition irgendeiner speziellen Lösung, z.B. der in *a)* berechneten. Also ist die allgemeine Lösung $y(t) = 2\sin t + (C_1 + C_2t + c_3t^2)e^{-t}$.

c) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten dieser Lösungen?

Lösung: Da e^{-t} schneller gegen Null geht als jedes quadratische Polynom gegen unendlich, nähern sich alle Lösungen immer mehr der reinen Schwingung $y(t) = 2\sin t$ an.