WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. Februar 2003

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \tan z$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion.

2) Was ist $\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

3) Was ist $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis γ?

4) *Richtig oder falsch:* $e^{\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}e^t & 2te^t\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$

5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 1-i & 1\end{pmatrix}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 5y(t)^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

7) *Richtig oder falsch:* $\dot y(t) = \sin y(t)$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$!

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \big[2\,|\sin t|\big]$, wobei $[x]$ für jede reelle Zahl x die größte ganze Zahl $z \le x$ bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Welche Periode hat f? Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = te^{-t^2}$!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Faltung $h = f * g$ von $f(t) = e^{-t^2}$ und $g(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1)$!

b) Welche FOURIER-Transformierte hat $h(t)$? Ist dies eine reellwertige Funktion?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Berechnen Sie die Matrix $e^{\Delta t}$!

e) Zeigen Sie, daß das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ genau eine beschränkte Lösung hat!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 2y(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = -3y(t) + 2z(t), \quad \dot{z}(t) = -3z(t)\,!$$

b) Bestimmen Sie die Lösung, die den Anfangsbedingungen $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ und $z(0) = -1$ genügt!

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 4\cos t - 4\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = \ddot{y}(0) = 0, \;\; \dot{y}(0) = 2\,!$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 4\cos t - 4\sin t\,!$$

c) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten dieser Lösungen?

Formelanhang

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(t) = e^{-t^2} \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{\frac{-\omega^2}{4}}$$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t+1)^2e^{-t} - \cos(t) - \sin(t)\right\}(s) = \frac{4}{(s^2+1)(s+1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2-1)e^{-t} + \cos(t) - \sin(t)\right\}(s) = \frac{-4s}{(s^2+1)(s+1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2-2t-1)e^{-t} + \cos(t) + \sin(t)\right\}(s) = \frac{4s^2}{(s^2+1)(s+1)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t^2-4t+1)e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)\right\}(s) = \frac{-4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 8. Februar 2003, um 13^{00} Uhr