Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. Februar 2003

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $\dot y(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0$

b) $\dot y(t) = a + bt + cy(t)$

c) $(1+t)\dot y(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0$

d) $\dot y(t) + y(t) = t^n$

e) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem $\dot y(t) = \cos y(t)$ mit $y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist!

f) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 2t \cdot \big(y(t) - 2\big)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie die Lösungsfunktion und bestätigen Sie diese durch Einsetzen!

g) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \tag{1}$$
$$\dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \tag{2}$$
$$\dot y(t) = e^{t+y(t)} \tag{3}$$
$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \tag{4}$$
$$\dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \tag{5}$$
$$\dot y(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \tag{6}$$

Hinweis zu (6)*:* $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

h) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3 \tag{1}$$
$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = -3 \tag{2}$$
$$\dot y(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{\pi}{4} \tag{3}$$
$$\dot y(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{4}$$
$$\dot y(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \tag{5}$$
$$y(t)\dot y(t) + \big(1 + y(t)^2\big)\sin t = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \tag{6}$$

i) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

j) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

k) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?