

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22. Januar 2003

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}!$
- b) Was ist e^C bzw. e^{Ct} ?
- c) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}!$
- d) Für Mutige: Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}!$ (Warnung: Das Ergebnis ist recht grausam!)
- e) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist tAA symmetrisch.
- f) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITESCHE Matrix?
- g) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche HERMITESCH? Von welchen wissen Sie, daß \mathbb{R}^4 eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

- h) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

- i) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n ?
- j) Was ist e^{At} ?
- k) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t)! \end{aligned}$$

- l) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!
- m) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!
- n) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \rightarrow \infty$?