Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. Januar 2003

a) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}$!

b) *Richtig oder falsch:* $e^A \cdot e^{(A^2)} = e^{(A^2)} \cdot e^A$.

c) Für eine $n \times n$-Matrix A sei $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$ und $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$. Finden Sie eine Matrix $P \neq 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \quad \text{und} \quad \cos(A + rP) = \cos A\,.$$

d) *Richtig oder falsch:* Die Eigenwerte der Matrix $2A$ sind doppelt so groß wie die von A.

e) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&2&-3\\4&-4&11\end{pmatrix}$!

f) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix}5&-6&-6\\3&-4&-5\\-2&4&5\end{pmatrix}$!

g) Was ist e^B?

h) Was ist e^{Bt}?

i) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 5x(t) - 6y(t) - 6z(t), & x(0) &= 0\\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - 4y(t) - 5z(t), & y(0) &= 0\\ \dot{z}(t) &= -2x(t) + 4y(t) + 5z(z), & z(0) &= 7\end{aligned}$$

j) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix}$!

Finden Sie möglichst viele Nullstellen der folgenden Polynome:

k) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$

l) $x^4 - 8x^3 - 34x^2 + 8x + 33$

m) $x^4 + 17x^3 + 69x^2 - 17x - 70$

n) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

o) $3x^6 + 6x^5 - 12x^4 - 30x^3 - 3x^2 + 24x + 12$

p) V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens 200. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ x(t) \mapsto \ddot{x}(t) \end{cases}$!

q) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x(t) \mapsto \dot{x}(t) \end{cases}!$$