Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Januar 2003

a) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x,y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x,y) = \big(\delta(x+\frac{\pi}{2}) + \delta(x-\frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y+\frac{\pi}{2}) - \delta(y-\frac{\pi}{2})\big)$!

Da Integration linear ist und jeder der beiden Faktoren von g nur von einer der beiden Integrationsvariablen abhängt, können wir ausmultiplizieren und nacheinander die vier zweidimensionalen Distributionen $\delta(x \pm \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(x \pm \frac{\pi}{2})$ mit f falten. Die entsprechenden Faltungsintegrale sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) \cdot \left(\delta\Big(u \pm \frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(v \pm \frac{\pi}{2}\Big)\right) du\, dv = f\Big(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Wegen $\sin\big(x \pm \frac{\pi}{2}\big) = \pm\cos x$ und $\cos\big(y \pm \frac{\pi}{2}\big) = \mp \sin y$ ist $f\big(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\big) = \pm \cos x \sin y$, wobei rechts genau dann ein Pluszeichen steht, wenn links *verschiedene* Vorzeichen stehen. Das Produkt

$$g(x,y) = \delta\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big) - \delta\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big) + \delta\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big) - \delta\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big)$$

führt also insgesamt zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) g(u,v)\, du\, dv = -\cos x \sin y - \cos x \sin y + \cos x \sin y + \cos x \sin y = 0\,.$$

b) Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein eindimensionales Hindernis mit keilförmiger Durchlässigkeit gemäß der Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Berechnen Sie das (Fraunhofer-)Beugungsbild dieses Hindernisses!

Mit der Variablen $u = k \sin\theta$ ist

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux}\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{a-|x|}{a} e^{-iux}\, dx = \int_{-a}^{0} \frac{a+x}{a} e^{-iux}\, dx + \int_{0}^{a} \frac{a-x}{a} e^{-iux}\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-iux}\, dx + \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0} x e^{-iux}\, dx - \int_{0}^{a} x e^{-iux}\, dx\right)\end{aligned}$$

xe^{-iux} hat $\dfrac{e^{-iux}}{u^2} - \dfrac{xe^{-iux}}{iu}$ als Stammfunktion; somit ist

$$\begin{aligned}\psi(u) &= -\frac{e^{-iua} + e^{iua}}{iu} + \frac{1 - e^{iau}}{au^2} + \frac{e^{iau}}{iu} - \frac{e^{-iau} - 1}{au^2} + \frac{e^{iau}}{iu} \\ &= -\frac{e^{iau} + e^{-iau} - 2}{au^2} = -\frac{1}{a}\left(\frac{e^{iau/2} - e^{-iau/2}}{u}\right)^2 = \frac{4}{a}\left(\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}\right)^2 = \frac{1}{a}\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{au}{2}\Big)\,.\end{aligned}$$

c) Vergleichen Sie mit dem Beugungsbild eines Spalts der Breite a, insbesondere was die Maxima und Mininma des Bildes betrifft! Können Sie das Ergebnis einfach erklären?

Abgesehen von Konstanten haben wir gerade das Quadrat des Beugungsbilds eines solchen Spalts. Für die Helligkeit und damit auch für die Lage der Maxima und Minima muß $\psi\overline{\psi}$

betrachtet werden, und das Quadrat dieser Funktion hat dieselben Nullstellen und Maxima wie $\psi\overline{\psi}$. Der Grund ist natürlich, daß ein Dreiecksimpuls der Breite $2a$ als Faltung eines Rechteckimpulses der Breite a mit sich selbst dargestellt werden kann.

d) In der TEM_{01}-Mode schwingt ein Laserstrahl in erster Näherung wie eine ebene Welle, nur daß die Phase in der rechten Hälfte gegenüber der linken Hälfte um π verschoben ist; die Grenze zwischen den beiden Hälften sei bei $x = 0$, und die Kreisfrequenz sei ω_0. Berechnen Sie das Beugungsbild eines solchen Strahls beim Durchgang durch obigen keilförmigen Spalt!

Da $e^{\pi i} = -1$ ist, muß die Durchlässigkeitsfunktion im rechten Teil mit -1 multipliziert werden; insgesamt haben wir es also zu tun mit der Funktion

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{a} & \text{für } -a \le x \le 0 \\ \frac{x-a}{a} & \text{für } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x)e^{-iux}\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} xe^{-iux}\,dx + \int_{-a}^{0} e^{-iux}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-iux}\,dx \\
&= \frac{e^{-iua} - e^{iua}}{au^2} - \frac{e^{-iau} + e^{iau}}{iu} - \frac{1 - e^{iua}}{iu} + \frac{e^{-iua} - 1}{iu} \\
&= \frac{-2i\sin au}{au^2} - \frac{2}{iu} = 2i\left(\frac{1}{u} - \frac{\sin au}{au^2}\right) = \frac{2i}{u}\operatorname{sinc}^2 au\,.
\end{aligned}$$

e) Berechnen Sie sein Beugungsbild für ein zum Nullpunkt symmetrisches Strichgitter mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right)\ !$$

Da wir immer noch TEM_{01} betrachten, ist die effektiv zu betrachtende Funktion wieder in der rechten Hälfte negativ zu nehmen; wir rechnen also mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x) &= \sum_{k=0}^{N} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right) - \sum_{k=N+1}^{2N+1} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} \delta\left(x + \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right) - \sum_{\ell=0}^{N} \delta\left(x - \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \sum_{\ell=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x + \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right)e^{-iux}\,dx - \sum_{\ell=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right)e^{-iux}\,dx \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} e^{iu(\frac{1}{2}+\ell)d} - \sum_{\ell=0}^{N} e^{-iu(\frac{1}{2}+\ell)d} = e^{iu/2}\sum_{\ell=0}^{N} e^{iu\ell d} - e^{-iu/2}\sum_{\ell=0}^{N} e^{-iu\ell d} \\
&= \frac{e^{iu/2}(1 - e^{iu(N+1)d})}{1 - e^{iud}} - \frac{e^{-iu/2}(1 - e^{-iu(N+1)d})}{1 - e^{-iud}} \\
&= \frac{1 - e^{iu(N+1)d}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} - \frac{1 - e^{-iu(N+1)d}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} = \frac{2 - e^{iu(N+1)d} - e^{-iu(N+1)d}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} \\
&= \frac{2 - 2\cos(N+1)du}{-2i\sin\frac{u}{2}} = i\cdot\frac{1 - \cos(N+1)du}{\sin\frac{u}{2}} = 2i\cdot\frac{\sin^2\frac{(N+1)du}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,.
\end{aligned}$$

f) Berechnen Sie sein Beugungsbild beim Auftreffen auf den rechteckigen Spalt mit Durchlässigkeitsfunktion $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Wieder müssen wir wegen der TEM_{01}-Mode tatsächlich mit

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -a < x < 0 \text{ und } |y| < b \\ -1 & \text{falls } 0 < x < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

rechnen. Außerdem muß hier die zweidimensionale FOURIER-Transformation betrachtet werden; mit $u = k\sin\theta$ und $v = k\sin\phi$ ist

$$\begin{aligned}
\psi(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x,y)e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy = \int_{-b}^{b}\left(\int_{-a}^{0} e^{-i(ux+vy)}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-i(ux+vy)}\,dx\right)dy \\
&= \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\left(\int_{-a}^{0} e^{-iux}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-iux}\,dx\right)dy = \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\left(\frac{e^{iua}-1}{iu} + \frac{e^{-iua}-1}{iu}\right)dy \\
&= \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\,\frac{2+e^{iua}+e^{-iua}}{iu}\,dy = \frac{(e^{iua/2}+e^{-iua/2})^2}{iu}\,\frac{e^{ivb}-e^{-ivb}}{iv} \\
&= -\frac{8i}{uv}\cos^2\frac{ua}{2}\sin vb\,.
\end{aligned}$$

g) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ des Vordpiploms seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma\big(w(t)-\beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Man kann natürlich ausmultiplizieren und die allgemeine Formel aus der Vorlesung anwenden; einfacher ist es aber, die Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ zu betrachten. Diese hat dieselbe Ableitung wie $w(t)$, genügt also der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit Lösung} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Also ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Integrationskonstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist.

h) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

In diesem Fall ist C also gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist

$$w(\tfrac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9e^{\ln\sqrt{\frac{5}{9}}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\tfrac{5}{9}} \approx 0{,}7708203933$$

ungefähr 77%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des Stoffs vergessen.

i) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinsmöglichen Zeiteinheit von 1/16 Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,\mathrm{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil uzur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$ des Gesamtvolumens. Vorher war die Sauerstoffmenge $y(t)V$; nachher ist sie

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Die Integrationskonstante ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{\frac{-12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{\frac{-108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

j) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

Da $y(t)$ stetig differenzierbar ist, ist $\dot{y}(t)$ stetig, muß also entweder konstant gleich eins oder konstant gleich minus eins sein. Damit gibt es die beiden Lösungsklassen $y(t) = \pm t + C$; die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erfüllen

$$y(t) = t - 1 \quad \text{und} \quad y(t) = -t + 1\,.$$

k) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)\ !$$

Da jede Funktion nur in einer Gleichung vorkommt, ist $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten C_i; der Lösungsraum besteht also aus allen Funktionen

$$\vec{y}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig}\,.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum n-dimensional.

l) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

Wir können z.B. schauen, ob es eine Gleichgewichtslösung gibt, d.h. eine Lösung, bei der beide Funktionen konstant sind. Dann verschwinden die Ableitungen, das System wird also zu

$$0 = y(t) \quad \text{und} \quad 0 = 1 - x(t)\,.$$

Damit ist $x(t) \equiv 1$ und $y(t) \equiv 0$ eine spezielle Lösung.

Für eine beliebige Lösung $\binom{x(t)}{y(t)}$ erfüllt die Differenz $\binom{u(t)}{v(t)}$ zu dieser speziellen Lösung das homogene Gleichungssystem

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -x(t)\,.$$

Für jede Lösung ist

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = -x(t), \quad \text{also} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = 0\,.$$

Dies ist die wohlbekannte Schwingungsgleichung mit allgemeiner Lösung $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

m) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(*Hinweis:* Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -\sin t \Longrightarrow \ln y(t) = \cos t + C \Longrightarrow y(t) = \widetilde{C} e^{\cos t} \quad \text{mit} \quad \widetilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

(Tatsächlich hätte man natürlich, wie in der Vorlesung bei $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$, eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von $y(t)$ machen müssen; der zweite Folgepfeil oben ist strenggenommen falsch, und $\ln y(t)$ ist *a priori* nicht unbedingt definiert.)