Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Januar 2003

a) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x,y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x,y) = \big(\delta(x+\frac{\pi}{2}) + \delta(x-\frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y+\frac{\pi}{2}) - \delta(y-\frac{\pi}{2})\big)$!

b) Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein eindimensionales Hindernis mit keilförmiger Durchlässigkeit gemäß der Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Berechnen Sie das (Fraunhofer-)Beugungsbild dieses Hindernisses!

c) Vergleichen Sie mit dem Beugungsbild eines Spalts der Breite a, insbesondere was die Maxima und Mininma des Bildes betrifft! Können Sie das Ergebnis einfach erklären?

d) In der TEM_{01}-Mode schwingt ein Laserstrahl in erster Näherung wie eine ebene Welle, nur daß die Phase in der rechten Hälfte gegenüber der linken Hälfte um π verschoben ist; die Grenze zwischen den beiden Hälften sei bei $x = 0$, und die Kreisfrequenz sei ω_0. Berechnen Sie das Beugungsbild eines solchen Strahls beim Durchgang durch obigen keilförmigen Spalt!

e) Berechnen Sie sein Beugungsbild für ein zum Nullpunkt symmetrisches Strichgitter mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} + k\right) d\right) \; !$$

f) Berechnen Sie sein Beugungsbild beim Auftreffen auf den rechteckigen Spalt mit Durchlässigkeitsfunktion $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

g) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ des Vordiploms seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot w(t) = -\gamma\big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

h) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

i) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\mathrm{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

j) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot y(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

k) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot y_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot y_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \ldots \quad \dot y_n(t) = \lambda_n y_n(t) \; !$$

l) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot x(t) = y(t), \quad \dot y(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

m) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot y(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(*Hinweis:* Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)