WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Dezember 2002

a) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$. Was ist die FOURIER-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)e^{k\cdot i\omega t}\,dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \check{\widehat{\varphi}}(k\omega) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \varphi(k\omega)$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k \Delta_{k\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k \delta(t-k\omega)\right) \varphi(t)\,dt$$

b) *ditto* für $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{N} \sin \ell\omega t$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(\cos k\omega t + \sin k\omega t\big) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}\right)$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1-i}{2} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1+i}{2} e^{-ik\omega t}.$$

Damit ist alles zurückgeführt auf die vorige Frage.

c) *ditto* für $f(t) = t$

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t\widehat{\varphi}(t)\,dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)\,dt = -2\pi i\check{\widehat{\dot\varphi}}(0) = -2\pi i\dot{\varphi}(0)$$
$$= 2\pi i\dot{\Delta}_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\dot{\delta}(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

d) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\varphi(t)}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(t)\,dt$$

läßt sich nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auch schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \frac{\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)}{a}\varphi(\tau) = \varphi(\tau)$$

für ein geeignetes $\tau \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$; für $a \to 0$ geht $\tau \to 0$, also der Wert des Integrals gegen $\varphi(0)$. Genau das ist auch der Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

e) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} dt - \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

unabhängig von a. Damit verschwindet auch der Limes für $a \to 0$.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt$ mit einem unstetigen f würden die meisten Mathematiker eher nicht für sinnvoll halten; Ingenieure haben weniger Hemmungen und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt = f(0) = 1\,,$$

was offensichtlich nicht gleich dem Limes der linken Seite ist.

f) Berechnen Sie für

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

$$\begin{aligned}
\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot{\varphi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1} \dot{\varphi}(t)\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(\varphi(2n) - \varphi(2n+1)\big) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \Delta_m(\varphi) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t-m)\right) \varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

g) *ditto* für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \dot\varphi(t)\,dt = \varphi(-\pi) - \varphi(\pi)$$

$$= \Delta_{-\pi}(\varphi) - \Delta_{\pi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)\big)\varphi(t)\,dt$$

h) Berechnen Sie für dasselbe g die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
$f_1(t) = \sin t, \qquad f_2(t) = \sin^2 t, \qquad f_3(t) = 5t + 7, \qquad f_4(t) = e^t$

$$(f_1 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s)\,ds = \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) = 0$$

$$(f_2 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\big(\sin(t-s)\cos(t-s) - (t-s)\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\big(-(t-\pi) + (t+\pi)\big) = \pi$$

$$(f_3 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(5(t-s)+7\big)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \big(5(t-s)+7\big)\,ds = 10\pi t + 14\pi$$

$$(f_4 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s}g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{t-s}\,ds = e^{t+\pi} - e^{t-\pi} = e^t(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

i) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\big) * \sin t$ und $\big(\delta(t) + \delta(t-\pi)\big) * \sin t$!

$$\big(\delta(t)+\delta(t-\tfrac{\pi}{2})\big)*\sin t = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s)+\delta(t-\tfrac{\pi}{2}-s)\big)\sin s\,ds = \sin t + \sin(t-\tfrac{\pi}{2}) = \sin t - \cos t$$

$$\big(\delta(t) + \delta(t-\pi)\big) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s) + \delta(t-\pi-s)\big)\sin s\,ds = \sin t + \sin(t-\pi) = 0$$

j) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

$f(\omega)$ ist die FOURIER-Transformierte von $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; da g quadratintegrierbar ist, ist es nach dem Satz von PARSEVAL auch f.

k) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$?

Wieder nach PARSEVAL ist mit obigen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \|f\|_2^2 = 2\pi\|g\|_2^2 = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2\,dt = \pi\,.$$

l) Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von NYQUIST scharf ist!
Man betrachte das Beispiel $\sin \Omega t$ mit Abtastung bei den Nullstellen.