Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Dezember 2002

a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

$$f(t) = t, \qquad g(t) = \frac{1}{t}, \qquad h(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}},$$
$$k(t) = e^{-t}, \qquad \ell(t) = e^{-t^2}, \qquad m(t) = e^{-t}\sin t, \qquad n(t) = e^{-|t|}\cos t$$

b) Berechnen Sie die L^2-Norm der folgenden Funktionen:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad g(t) = e^{-t^2}, \qquad h(t) = e^{-(1+t)^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{1+|t|}$$
$$k(t) = \frac{1}{1+|[t]|}, \qquad \ell(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Welche L^2-Normen haben die Fourier-Transformierten dieser Funktionen?

d) Berechnen Sie die L^2-Norm der Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$!

e) Welche der Funktionen aus *a)* und *b)* sind absolut integrierbar?

f) Welche der folgenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ sind Distributionen?

$$T_1(\varphi) = 3\varphi(2) - 2\varphi(3), \qquad T_2(\varphi) = \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, \qquad T_3(\varphi) = 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3),$$
$$T_4(\varphi) = e^{\varphi(0)}, \qquad T_5(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \qquad T_6(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt,$$
$$T_7(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, \qquad T_8(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, \qquad T_9(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(n)}{n!}$$

g) Zu welchen der folgenden Abbildungen $T_i\colon L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ gibt es Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $T_i = \widetilde{T}_f$?

$$T_1(\varphi) = 3\varphi(2) - 2\varphi(3), \qquad T_2(\varphi) = \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, \qquad T_3(\varphi) = 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3),$$
$$T_4(\varphi) = e^{\varphi(0)}, \qquad T_5(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \qquad T_6(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt,$$

h) Welche der folgenden Vorschriften definieren Abbildungen $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$?

$$T_7(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, \qquad T_8(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, \qquad T_9(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(n)}{n!}$$

i) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Distributionen

$$T_1\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(1) + \varphi(-1)\big) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(i) + \varphi(-i)\big) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form T_f mit Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$!

j) $f(t) \equiv a$ mit $a \in \mathbb{C}$ sei eine konstante Funktion. Was ist $\widehat{T}_f$? Existiert $\widehat{f}(\omega)$?