Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Dezember 2002

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ist stark abfallend.

Falsch; beispielsweise bleibt $t^3 f(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ nicht beschränkt für $t \to \pm\infty$.

b) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\cosh t}$ ist stark abfallend.

Richtig: Zunächst hat jede Ableitung von f die Form

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(\sinh t, \cosh t)}{\cosh^{n+1} t},$$

wobei $P(x, y)$ ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens n ist: Für $n = 0$ ist das klar mit $P \equiv 1$, und $f^{(n+1)}(t)$ ist die Ableitung von $f^{(n)}(t)$, also ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{\cosh^{n+1} t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \cosh^n t \sinh t}{\cosh^{2n+2} t} \\ &= \frac{\cosh t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \sinh t}{\cosh^{n+2} t} \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) = \frac{\partial}{\partial x} P_n(\sinh t, \cosh t) \cosh t + \frac{\partial}{\partial y} P_n(\sinh t, \cosh t) \sinh t$$

hat die Ableitung von $P_n(\sinh t, \cosh t)$ höchstens denselben Grad wie das Polynom selbst, also hat der Zähler höchstens Grad $n + 1$, womit die Behauptung induktiv folgt. Insbesondere ist spätestens jetzt klar, daß $f(t)$ beliebig oft differenzierbar ist.

Wir schreiben den Nenner um als

$$\cosh^{n+1} t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{-2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{(n+1)t} g(t),$$

wobei $g(t) = (1 + e^{-2t})^{n+1}/2^{n+1}$ für $t \to \infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Genauso können wir ihn auch umschreiben als

$$\cosh^{n+1} t = e^{-(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{-(n+1)t} \widetilde{g}(t),$$

wobei $\widetilde{g}(t)$ für $t \to -\infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt.

Den Zähler können wir entsprechend schreiben als

$$P_n(\sinh t, \cosh t) = e^{-nt} h(t) = e^{nt} \widetilde{h}(t),$$

wobei $h(t)$ für $t \to \infty$ und $\widetilde{h}(t)$ für $t \to -\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Insgesamt ist also

$$f^{(n)}(t) = e^{-t} m(t) = e^t \widetilde{m}(t),$$

wobei $m(t)$ für $t \to \infty$ und $\widetilde{m}(t)$ für $t \to -\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Damit ist klar, daß auch für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ der Betrag von $t^r f^{(n)}(t)$ für $t \to \pm\infty$ beschränkt bleibt.

c) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist stark abfallend.
Falsch, denn sie ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

d) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = te^{-t}$ ist stark abfallend.
Falsch, denn sie ist für $t \to -\infty$ nicht beschränkt.

e) Richtig oder falsch: Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.
Richtig: Sie ist wieder beliebig oft differenzierbar, und

$$\left|t^r(f+g)^{(k)}(t)\right| = \left|t^r f^{(k)}(t) + t^r g^{(k)}(t)\right| \le \left|t^r f^{(k)}(t)\right| + \left|t^r g^{(k)}(t)\right|$$

ist beschränkt für alle $k, r \in \mathbb{N}_0$.

f) Richtig oder falsch: Ist f stark abfallend, so auch jede Potenz f^n mit $n \in \mathbb{N}$.
Richtig: Mit der Differenzierbarkeit gibt es keine Probleme, und jede Ableitung von $f^n(t)$ kann abgeschätzt werden durch Produkte von Ableitungen von $f(t)$.

g) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?
Nur die Nullfunktion. Falls die Funktion nämlich irgendwo einen von null verschiedenen Wert annimmt, ist $tf(t)$ für $t \to \pm\infty$ nicht mehr beschränkt.

h) Richtig oder falsch: Wenn die FOURIER-Transformierte von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, ist f stark abfallend.
Falsch; beispielsweise existiert die FOURIER-Transformierte eines Rechtecksimpulses, der als nicht differenzierbare Funktion auch nicht stark abfallend sein kann.

i) Die FOURIER-transformierbare Funktion f erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer FOURIER-transformierbaren Funktion g. Drücken Sie $\widehat{f}(\omega)$ durch $\widehat{g}(\omega)$ aus!
FOURIER-Transformation macht aus den beiden Seiten der Gleichung

$$-\omega^2\widehat{f}(\omega) - 4i\omega\widehat{f}(\omega) - 3\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega) \quad \text{oder} \quad \widehat{f}(\omega) = -\frac{\widehat{g}(\omega)}{\omega^2 + 4i\omega + 3}\,.$$

j) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!
$F(t)$ erfüllt die Gleichung $\dot{F}(t) = f(t)$ und $F(0) = a$; daher ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = s\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - a$$

und

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^n\}(s) + \frac{a}{s} = \frac{n!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) + \mathcal{L}\{a\}(s)\,.$$

Also ist $F(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + a$, was man natürlich auch einfacher ohne LAPLACE-Transformation bekommen kann.

k) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$?

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda}$$

l) Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}(s)$?
Für keine; das Integral hat stets Konvergenzprobleme an der unteren Grenze; *siehe Skriptum.*

m) Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

Da man, absolute Konvergenz der Integrale vorausgesetzt, die Integration über t und die Differentiation nach s miteinander vertauschen kann, ist

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)\,.$$

n) Was ist $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)$?

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s) = \mathcal{L}\big\{t\big(tf(t)\big)\big\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

o) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000}\}(s)$?

$$\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000}\}(s) = e^{-2000}\mathcal{L}\{t^{1999}\}(s) = \frac{1999!\,e^{-2000}}{s^{2000}} = \frac{1999!}{(es)^{2000}}$$

Randbemerkung für Interessenten: Der Zahlenwert von 1999! ist

1658137546225316620587696690288162019140558604052890197285967718530190389528004112001366154298662961277011764706 12
917054629042408707646898065693316763171844452817029278081970302558626285935323928196772022702621978733518837054361
485217342079171876215790438766822563743997718429623704016204473280753616625326398827878589835768359344679528056407
935800858616328578055002107006210216921286856350087941773898449960641764498332926702789927451828683175066693275200
586006076317744019134076076123460497603015782209282740337973248525776144102617449997863225407032768339484766050733
811335666013415776102597247230809119637602013264861315751287376024148032375463697082928141765889787241438157298225
186995663667088631804426245046753310805072229854706353910656866281915786151009974957479158235471387236935163992774
837149304419688163412076239417193734797914628870287269918750792907734068147108974986199906799740508278281938017113
656456125192354936454813311230985538302965775100947567791582678935746145458389524851123547305968803892582555342216
127952824368133265188692325195394024762300356274701307283036127068151377456835791703048915537472641108745390673854
846620778055669914025679300345297309982628655370588540759961282258389285729028301092827380476188731508339711244222
242899174900774016310414945482928690875944309688346414139944226792319948297106976492232645546004551855023074724957
914294025380933962473192590439937256445704009670037312960028549364789299821825327947806205115509345278030154391814
555252800622954499191705399683951026038429334591738953279272350074346328462315966668806214048710033586423180969624
849314234359996725196944683635243563586367280850177433738754551477761976773970553710956650678409770545970731383208
771080793812631429044900611221945124338591027479707875995850635883785893747930809832965939427570917891046300741035
888665867698017152484541035294979350690990406517795080381454194287280644108849068091241788369609151559207359566993
446421172000389623345604883365825716747218736617818286024422239165927470846515062265838116372683939661423736912242
546141569976254866252989563515523841800740595551114626686348846911835028782806200145288021926426451468803239766729
089833061919802631274553593331934677383054227523099051042025317913838263294746196624759842977085836209664765341836
747772002293179919080521529724913313765302711790377947054139440213912975544940317705283958975487008890344391434905
109505450074176030844441860125155332961034300741824915266391044131768279021802843390642084608566523570588156087947
888561318792376561758615495274914605067343652102949007209031937691332084948852118879703140438626851132713265290431
189650711337910593571751459318818170150086625909131038019873684797601321316182072723425556713601075229191925505068
470656517428110958315811946316382907677505638153912529984579412266728717718931841586865336648294677599847229118436
754415139328850439874944996171777783120341417381892342591922486824436976237551612111055280600647914828595684054346
912737882059443439673362595623096075572369418134795821836245035826714114076330623900231961272472585181861813970378
892271045524152730828095311087143490801486662023260100996406927441340975503641434850535368750463833243751087387686
371175754374123360137085015790561402948089061080373718973755475310469278337290626259188341078856403930749627938066
176475211173193939477425442882233068145197063832989022101046140668993557950448132439471206605227462501783335316454
720789686493371710735253606794466009790361532390749214761297794506377411985886662861455162880464895366649772528194
181320237325122540404734558036316043747071986500352055709297765139413678827409591001224848880555673159097641380795
482094895479058669313603044455216472622489267573507056221071527743044819789189173662661797881645719462644196993128
136621431387781570231915194584210816556722818154785982989233169275746158098167837677569201712902081459918911133454
760885076587669365142305420943277069164585975666058947864270831042411841408966256465618760770963485134851649738821
911693241504435765186702833191934147044243865360881134424511542467330597130090136306901054002539107870503027424100
673929789051385353890327756386270250837166198033126608207502404386201523805964516105077192676569342769243212785395
397670588259785594341869940341947896371874841749071461646098154888545071968421827666679653910090656496727512103022
281670289303481235980752801697449761660900217179983628311963598217701436027737506039927165985337398656563406761826
872042831131603384418792566391448126166642170906488812348539771718001746171579619837381819456057642703328891823106
955623723525627613171350619763509063522745824022966124054429337300476153396587983877790505839970002624903151881570
672206134518517493677899958004629624037526242770784133140880407723154152703338706315062220932102054186559546565000
577235280138888686218903359444998854255283636383906235994164288479221087944475802339341024050050239082311791104192 66
244067135417039934243316081360104411654363909542689422734565778010864436560953696982604630114550738763540465432682
489929277005288725139644907301844215910754318623108483936141084673685299643138556223845460451494160083415085136710
129882835854931655608174751085632213413559825132027114115879815437237650923597047762131705749234754036695040000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000

p) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s)$?

$$\frac{\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s) = \mathcal{L}\{t^{1999}\}(s+2000) = 1999!}{(s+2000)^{2000}}$$

q) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(x+a)$!
Für $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ gilt

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) = 0\,,$$

also

$$X(s) = \frac{s\sin a + \cos a}{s^2+1} = \sin a \cdot \frac{s}{s^2+1} + \cos a \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin a\cos t + \cos a \sin t\}(s)\,.$$

Da $\sin(a+t)$ das Anfangswertproblem offensichtlich löst, folgt (modulo der noch nicht gezeigten Umkehrbarkeit der LAPLACE-Transformation)

$$\sin(a+t) = \sin a \cos t + \cos a \sin t\,.$$

r) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Cosinus herleiten?
$\cos(a+t)$ löst das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \cos a, \quad \dot{x}(0) = -\sin a\,.$$

s) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von LAPLACE-Transformationen!

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c = \lambda\mathcal{L}\{y(t)\}\,,$$

also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{c}{s-\lambda} = c\mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \mathcal{L}\{ce^{\lambda t}\}(s)\,.$$

t) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von LAPLACE-Transformationen!

$$\mathcal{L}\{y^{(4)}(t)\}(s) = s^4\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^3 - 2s^2 - 3s = 16\mathcal{L}\{y(t)\}(s)\,,$$

also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s}{s^4 - 16}\,.$$

In der Tabelle auf der Rückseite des Übungsblatts stehen LAPLACE-Transformationen mit Nenner $s^4 - \omega^4$ und Zähler s, s^2, s^3; mit $\omega = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(\sinh 2t + \sin 2t) + \frac{3}{8}(\cosh 2t - \cos 2t) \\ &= \frac{7}{8}\cosh 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\,. \end{aligned}$$

u) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!

$$\mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) = s^3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0 \Longrightarrow y(t) \equiv 0\,.$$

v) Laut Vorlesung ist die FOURIER-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ gleich der Funktion $g_\sigma(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$. Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t)$ und $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega)$!

$N_\sigma(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ geht für $\sigma \to 0$ gegen unendlich; für $t \neq 0$ ist $\lim\limits_{\sigma\to 0} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = 0$, also auch $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t) = 0$, denn der Exponentialfaktor geht schneller gegen null als $1/\sigma$ gegen unendlich.

Für beliebiges ω ist $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega) = \lim\limits_{\sigma\to 0} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} = e^0 = 1\,.$