WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Dezember 2002

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ist stark abfallend.

b) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\cosh t}$ ist stark abfallend.

c) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist stark abfallend.

d) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = te^{-t}$ ist stark abfallend.

e) Richtig oder falsch: Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.

f) Richtig oder falsch: Ist f stark abfallend, so auch jede Potenz f^n mit $n \in \mathbb{N}$.

g) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?

h) Richtig oder falsch: Wenn die FOURIER-Transformierte von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, ist f stark abfallend.

i) Die FOURIER-transformierbare Funktion f erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer FOURIER-transformierbaren Funktion g. Drücken Sie $\widehat{f}(\omega)$ durch $\widehat{g}(\omega)$ aus!

j) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!

k) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$?

l) Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}(s)$?

m) Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

n) Was ist $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)$?

o) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000}\}(s)$?

p) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s)$?

q) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(x+a)$!

r) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Cosinus herleiten?

s) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von LAPLACE-Transformationen!

t) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von LAPLACE-Transformationen!

u) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!

v) Laut Vorlesung ist die FOURIER-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ gleich der Funktion $g_\sigma(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$. Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t)$ und $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega)$!