WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. November 2002

Lösungen

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist linear unabhängig von den Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Richtig, denn sonst wäre $|\sin t|$ eine Linearkombination von endlich vielen dieser Funktionen, also insbesondere stetig differenzierbar.

b) Richtig oder falsch: Die Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für $L_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Falsch, denn wie wir aus der Vorlesung wissen, ist

$$(\cos k\ell,\ \cos k\ell) = (\sin \ell t,\ \sin \ell t) = \frac{1}{2} \neq 1 .$$

c) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Richtig, denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,dt = \widehat{f}(\omega) .$$

d) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Richtig, denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} -f(s)e^{-i\omega s}\,dt = -\widehat{f}(\omega) .$$

e) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Falsch; beispielsweise ist $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ ungerade.

f) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Falsch; beispielsweise ist $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ gerade.

NB: Man darf keinesfalls aus den letzten beiden Gegenbeispielen eine allgemeine Regel ableiten: Die gerade Funktion $\sin|t|$ hat schließlich genau dieselbe gerade LAPLACE-Transformierte wie der Sinus selbst!

g) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} !$$

FOURIER-Transformierte:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = 2\int_0^1 (1-t)e^{-i\omega t}\,dt = 2\int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt - 2\int_0^1 te^{-i\omega t}\,dt \\
&= 2\int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt + 2t\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\Big|_0^1 + \frac{2}{i\omega}\int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \left(2+\frac{2}{i\omega}\right)\int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt + \frac{2e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{2i\omega+2}{i\omega}\cdot\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega} + \frac{2e^{-i\omega}}{i\omega} \\
&= \frac{(2+2i\omega)(1-e^{-i\omega}) - 2i\omega e^{-i\omega}}{\omega^2} = \frac{2+2i\omega-2e^{-i\omega}}{\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

LAPLACE-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 (1-t)e^{-st}\,dt = \frac{e^{-s}+s-1}{s^2}$$

nach derselben Rechnung wie oben mit s statt $i\omega$.

h) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \;!$$

FOURIER-Transformierte:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2i\omega\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}\,,$$

wie man z.B. EULER oder (zweimaliger) partieller Integration nachrechnet.
LAPLACE-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{1-se^{-\pi s/2}}{1+s^2}\,.$$

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine reellwertige Funktion, deren FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ existiere. Drücken Sie Real- und Imaginärteil von $\widehat{f}(\omega)$ durch reelle Integrale aus!

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t - i\sin\omega t\big)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt
\end{aligned}$$

j) Welches dieser Integrale verschwindet für gerade *bzw.* ungerade Funktionen f ?
Der Realteil verschwindet für ungerades f, der Imaginärteil für gerades.

k) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$?

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda}$$

(Direktes Nachrechnen geht auch nicht viel länger.)

l) Gilt dies auch für komplexe λ ?

Natürlich; vom Beginn des Semesters wissen wir, daß für komplexe Funktionen dieselben Integrationsregeln gelten wie für reelle.

m) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{\sinh at\}(s)$ und $\mathcal{L}\{\cosh at\}(s)$!

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

n) Interpretieren Sie die Ergebnisse für $a = i\omega$!

Wegen $\sinh i\omega = i \sin\omega$ und $\cosh i\omega = \cos\omega$ führt das auf die bekannten LAPLACE-Transformierten von Sinus und Cosinus.

o) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } [t] \text{ ungerade}\end{cases} \;!$$

Stellen Sie das Ergebnis nicht als unendliche Summe dar, sondern als geschlossenen Ausdruck!

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{\ell=0}^\infty e^{-2s\ell}\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau = \left(\sum_{\ell=0}^\infty e^{-2s\ell}\right)\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1+e^{s}}{s}\,.\end{aligned}$$

p) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t - [t]$ und stellen Sie auch hier das Ergebnis in geschlossener Form dar!

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 \tau e^{-s\tau}\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Die bereits mehrfach durchgeführte partielle Integration zeigt, daß

$$\int te^{-st} = -\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} + C$$

ist. d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \left(\sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\right)\cdot\frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2} = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s}}) = \frac{e^s-(1+s)}{s^2(e^s-1)}\,.$$