Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. November 2002

Falls Sie noch Probleme mit der Berechnung von Fourier*-Reihen haben, sind die entsprechenden Beispiele der letzten Woche wichtiger als viele der folgenden Themen:*

a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} \quad \text{für} \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}\,!$$

Das ist offensichtlich eine geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k\cdot i\omega t}}{2^k}\,.$$

b) Schließen Sie daraus auf die reelle Fourier-Reihe der Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}} \quad \text{für} \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}\,!$$

Der zweite Summand ist ganz entsprechend

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k}\,,$$

insgesamt haben wir also (da der Term mit $k = 0$ *zweimal vorkommt)*

$$f(t) = 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{k\cdot i\omega t}}{2^k} + \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k} \right) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{2^{k-1}}\,.$$

c) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit Fourier-Reihe

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}\,?$$

Für eine solche Funktion wäre in der komplexen Fourier*-Reihe*

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{sqrt} k} & \textit{für } k > 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{sqrt} k} & \textit{für } k < 0 \end{cases},$$

nach der Bessel*schen Ungleichung also*

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \le (f, f)\,.$$

Da die linke Seite das Zweifache der divergenten harmonischen Reihe ist, kann diese Ungleichung nicht gelten.

d) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe

$$S_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}} \ ?$$

Hier wäre entsprechend

$$c_k = \begin{cases} 0 & \textit{für gerade } k \\ \frac{1}{\sqrt{2k+1}} & \textit{für ungerade } k \end{cases},$$

also

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \le (f,\, f)\,.$$

Auch hier ist aber die linke Seite divergent, denn $2k+1 \le 3k$ *und*

$$\frac{1}{2k+1} \ge \frac{1}{3k} \quad \textit{d.h.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \ge \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kann durch eine harmonische Reihe nach unten abgeschätzt werden.

e) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \ !$$

konvergiert und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grezwert!
Hinweis: Die komplexe FOURIER-Reihe von $\sinh t$ ist laut Vorlesung

$$S_f(t) = i\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}\,.$$

Tatsächlich ging es in der Vorlesung um jene Funktion $f(t)$, *die zwischen* $-\pi$ *und* π *mit* $\sinh t$ *übereinstimmt und ansonsten Periode* 2π *hat. In der* FOURIER*-Reihe ist*

$$c_k = i\frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{(-1)^k k}{k^2+1} \quad \textit{und} \quad |c_k|^2 = \frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2}\frac{k^2}{k^2+1}\,.$$

Nach der BESSEL*schen Ungleichung ist daher*

$$\frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \le (f,\, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t \, dt\,.$$

Das rechtsstehende Integral ist gleich

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cosh 2t - 1)\, dt = \left(\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{\sinh 2\pi}{2} - \pi\,,$$

also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \le \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi} \cdot \left(\frac{\sinh \pi}{2} - \pi\right)\,.$$

f) Finden Sie obere Schranken für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ !$$

Für die erste Summe sind Rechteckschwingungen ein guter Ansatz: Für

$$f(t)=\begin{cases} h & \textit{für } 0\le t<\frac{T}{2} \\ -h & \textit{für } \frac{T}{2}\le t<T \end{cases} \quad \textit{mit} \quad f(t+T)=f(t) \quad \textit{für alle} \quad t\in\mathbb{R}$$

ist

$$S_f(t)=\frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}\;;$$

speziell für $h=\dfrac{\pi}{4}$ *ist also*

$$b_\ell=\begin{cases} 0 & \textit{für gerade } \ell \\ \frac{1}{\ell} & \textit{für ungerade } \ell \end{cases} \quad \textit{und} \quad c_\ell=\begin{cases} 0 & \textit{für gerade } \ell \\ \frac{\pm i}{2\ell} & \textit{für ungerade } \ell \end{cases}.$$

Damit ist

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

nach der BESSEL*schen Ungleichung kleiner oder gleich*

$$(f,\,f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T h^2\,dt=h^2=\frac{\pi^2}{16}\,,$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\le\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Für die zweite Summe betrachten wir Sägezahlimpule mit Periode 2π*; für diese ist* $\omega=1$*, so daß die* FOURIER*-Reihe gleich*

$$S_(t)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin\ell t}{\ell}$$

ist. Diesmal ist $|c_k|=1/2k$ *für alle* $k\neq0$ *und* $c_0=0$*, also*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le(f,\,f)\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}(f,\,f)&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t-\pi}{2}\right)^2\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u^2}{4}\,du=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi^3}{12}\right)=\frac{\pi^2}{12}\,,\end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le\frac{\pi^2}{6}\,.$$