WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

20. Januar 2002

13. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x + 20$?

2) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x - 20$?

3) *Richtig oder falsch:* Ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und führendem Koeffizienten eins hat ganzzahlige Nullstellen.

4) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$ ist HERMITEsch.

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ${}^t\!A\overline{A}$ HERMITEsch.

6) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor r-ter Stufe gibt, hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit r.

7) *Richtig oder falsch:* Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r-ter Stufe.

8) Die komplexe $n \times n$-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit den algebraischen Vielfachheiten $r_1, \dots, r_s$. Was ist $\det A$?

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -5x(t) - 8y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + 3y(t)\,!$$

b) Welche dieser Lösungen bleiben für $t \to \infty$ beschränkt?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Hauptvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat!

c) Berechnen Sie die hundertste Potenz von A !

d) Was ist e^{At}?

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) - 2z(t), & y(t) &= 2 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), & z(t) &= 3 \end{aligned}$$

f) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?

Abgabe bis zum Montag, dem 27. Januar 2003, um 15.30 Uhr