WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

13. Januar 2003

12. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!

2) Richtig oder falsch: Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.

3) Richtig oder falsch: (A_i) sei eine konvergente Folge von $n \times n$-Matrizen. Dann konvergiert auch die Folge der Matrizen e^{A_i}.

4) Richtig oder falsch: Jede reelle 3×3-Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

5) Richtig oder falsch: Ein Eigenvektor $\vec{v}$ der Matrix A zum Eigenwert λ ist Eigenvektor von e^A zum Eigenwert e^λ.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -x(t) + y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -y(t)\,!$$

d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$!

b) Bezüglich welcher Basis von $\mathbb{C}^2$ hat A welche Diagonalgestalt?

c) Auf $V = [1, t, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(f) = \frac{d^2 f}{dt^2}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!

b) Was ist e^A ?

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) \phantom{{}+15y(t)} - 8z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) \phantom{{}+15y(t)} - 8z(t), & z(0) &= 2 \end{aligned}$$

Abgabe bis zum Montag, dem 20. Januar 2003, um 15.30 Uhr