WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. November 2001

7. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: V sei der Vektorraum aller im Intervall $[-1,1]$ durch eine TAYLOR-Reihe um null darstellbaren Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ mit Produkt $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Dann bilden die Potenzen $1, x, x^2, \dots$ ein vollständiges Orthonormalsystem von V.

2) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde für alle $t < 0$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(i\omega)$.

3) Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at+b)\}(s)$?

4) Richtig oder falsch: Falls es reelle Zahlen c, M gibt, so daß $|f(t)| < Me^{ct}$ ist für alle $t \geq 0$, existierts $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s > c$.

5) Richtig oder falsch: Für $f(t) = e^{-t^2}$ existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Für eine periodische Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit komplexer FOURIER-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ wird $\kappa = \sqrt{\dfrac{\sum_{|k|>1} |c_k|^2}{\sum_{|k|>0} |c_k|^2}}$ als *Klirrfaktor* bezeichnet. Berechnen Sie den Klirrfaktor

a) für eine reine Sinusschwingung

b) für eine periodischen Rechteckschwingung

c) für eine Sägezahnschwingung,
jeweils für die in der Vorlesung behandelte Standardform!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Berechnen Sie die FOURIER- und LAPLACE-Transformierten von

a) $f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{für } |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| < 10\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Aufgabe 3: (*4 Punkte)*

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode T. Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{1 - e^{-Ts}} \displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^T (1 - \cos\omega t)e^{-st}\,dt$ für $T = 2\pi/\omega$ über die LAPLACE-Transformierte von $1 - \cos\omega t$!

Abgabe bis zum Montag, dem 2. Dezember 2002, um 15.30 Uhr