WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

18. November 2002

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die konstante Funktion $f(t) \equiv 1$ ist periodisch mit jeder Periode T. Was ist $1 * 1$ in Abhängigkeit von T ?

2) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $1 * f = f$.

3) *Richtig oder falsch:* Für beliebiges $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $g \in P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt $f * g$ in $P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

4) *Richtig oder falsch:* f sei periodisch mit Periode 2π und für $-\pi \le t < \pi$ sei $f(t) = \sinh t$. Dann konvergiert die FOURIER-Reihe von f für alle $t \in \mathbb{R}$.

5) *Richtig oder falsch:* Wenn eine FOURIER-Reihe von f an mindestens einer Stelle das GIBBS-Phänomen zeigt, konvergiert sie nicht für alle t gegen $f(t)$.

6) Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = e^{t-[t]}$ an der Stelle $t = 0$, wenn $[t]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t bezeichnet?

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*
Die Funktion f sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi < t \le \pi$ sei $f(t) = (\pi - t)^2$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe von f gegen $f(t)$?

d) Wohin konvergiert sie für die übrigen $t \in \mathbb{R}$?

e) Wo tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf, und welchen (ungefähren) Maximalwert erreichen die Teilsumme dort?

f) Berechnen Sie mit Hilfe der FOURIER-Reihe aus *b)* die Summe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$!

Aufgabe 2: (*7 Punkte)*
Für die Funktion g_a sei $g_a(t) = 1/a$ für $|t| < a$ und $g_a(t) = 0$ für alle anderen Punkte im Intervall $[-\pi, \pi]$ für ein festes $a < \pi$; g_a werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode 2π.

a) Skizzieren Sie die Funktion g_a !

b) Berechnen Sie für $a < \frac{\pi}{2}$ die Faltung $g_a * g_a$!

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von g_a !

d) Wohin konvergiert diese FOURIER-Reihe?

e) An welchen Stellen tritt das GIBBS-Phänomen auf, und welchen (ungefähren) Maximalwert erreichen die Teilsumme dort?

f) Wie verhalten sich die FOURIER-Koeffizienten für $a \to 0$?

Abgabe bis zum Montag, dem 25. November 2002, um 15.30 Uhr