Falls wir eine Stammfunktion von $f$ kennen, ist die Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

also ganz einfach. Eine erste Auswahl von Stammfunktionen erhalten wir durch Rückwärtslesen von Differentiationsregeln, zum Beispiel

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \Rightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{falls } n \neq -1$$
$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \Rightarrow \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad \text{falls } a \neq 0\,,$$

und auch Formeln wie

$$\int \sin\omega x\,dx = -\frac{\cos\omega x}{\omega} + C \quad \text{und} \quad \int \cos\omega x\,dx = \frac{\sin\omega x}{\omega} + C$$

sind nun problemlos. Für weitere Stammfunktionen müssen wir allerdings zunächst noch einige Funktionen kennenlernen.

## f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

Die Ableitung einer rationalen Funktion ist wieder eine rationale Funktion; für Stammfunktionen gilt allerdings nicht dergleichen, denn wie wir gerade gesehen haben, ist schon die Stammfunktion von $x^{-1}$ nicht mehr rational, sondern der natürliche Logarithmen. Wie wir bald sehen werden, reichen (im Reellen) auch Logarithmen noch nicht aus, um alle rationalen Funktionen integrieren zu können; wir brauchen zusätzlich noch die sogenannten Arkus- und Areafunktionen.

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen: Letztere ordnen einem Winkel eine reelle Zahl zu; die Umkehrfunktionen liefern also als Ergebnis einen Winkel oder auch Bogen, auf lateinisch *arcus* genannt.

Unter den trigonometrischen Funktionen sind zumindest der Sinus und der Cosinus aus der Analysis I bekannt; die meisten kennen wohl auch



bereits deren Quotienten

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

den Tangens. Im rechtwinkligen Dreieck gibt er das Verhältnis zwischen Gegenkathete und Ankathete eines Winkels an und damit das, was man üblicherweise als *Steigung* bezeichnet: das Verhältnis der Höhendifferenz zur horizontalen Entfernung.

Da $\cos x$ für $x = \pi/2 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ verschwindet, ist $\tan x$ an diesen Stellen nicht definiert; in ihrer Umgebung wird er links, wo Sinus und Cosinus dasselbe Vorzeichen haben (+ für gerades $k$, $-$ für ungerades) beliebig groß, rechts beliebig negativ; siehe dazu auch Abbildung 47.

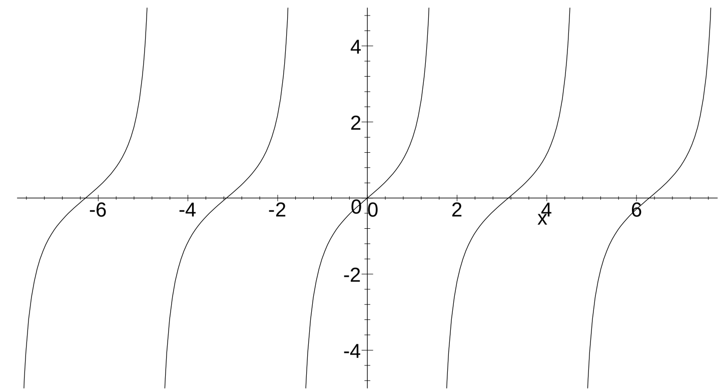


Abb. 47: Der Tangens

Aus den speziellen Werten von Sinus und Cosinus berechnet man leicht die entsprechenden Werte für Tangens:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |

Da alle trigonometrischen Funktionen periodisch sind, können sie keine global definierten Umkehrfunktionen haben; wir müssen sie also jeweils auf ein Intervall einschränken, auf dem sie injektiv oder – besser noch – monoton sind.

Im Fall des Sinus bietet sich das Intervall von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ an, in dem er monoton von $-1$ auf 1 ansteigt; wir definieren daher *den Arkussinus* oder – genauer ausgedrückt – den *Hauptwert* des Arkussinus für dieses Intervall:

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist die Umkehrfunktion von

$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]\,.$$

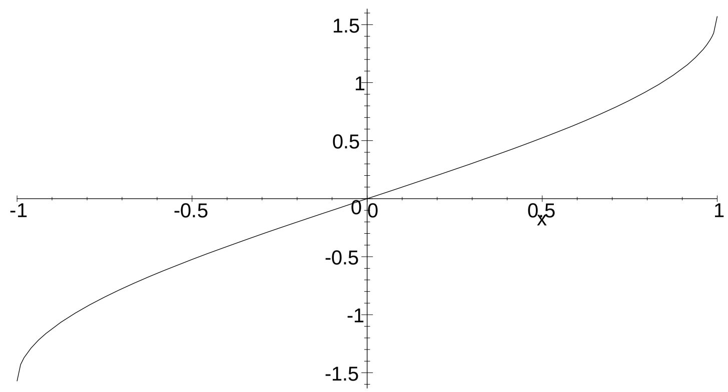


Abb. 48: Der Arkussinus

Der Cosinus fällt von seinem Maximalwert 1 an der Stelle Null monoton ab, bis er bei $\pi$ den Wert $-1$ erreicht hat. Wir definieren den *Hauptwert* der Umkehrfunktion *Arkuscosinus* oder kurz *den* Arkuscosinus daher für dieses Intervall:

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

ist die Umkehrfunktion von

$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]\,.$$



Aufgrund der Beziehung $\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ und der Wahl der Wertebereiche ist

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\,.$$

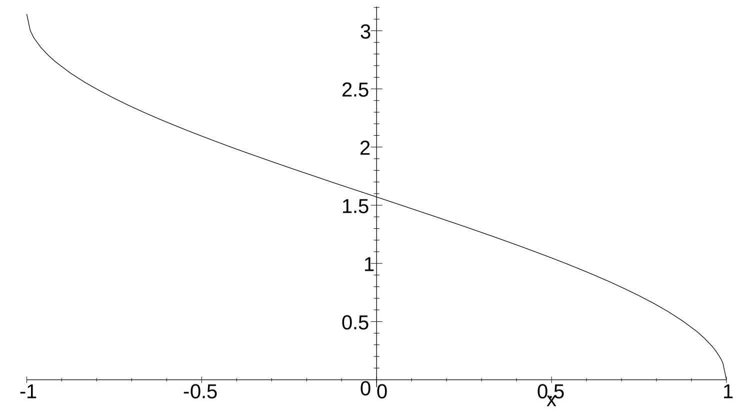


Abb. 49: Der Arkuscosinus

Der Tangens schließlich ist monoton ansteigend im offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ und nimmt dort jeden reellen Wert an; wir definieren den *Hauptwert* der Umkehrfunktion *Arkustangens* oder kurz *den* Arkustangens daher für dieses Intervall:

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist die Umkehrfunktion von

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,.$$

Gelegentlich ganz nützlich ist der Wert an der Stelle 1: Da nach obiger Tabelle $\tan\frac{\pi}{4}$ den Wert 1 hat, ist $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ oder

$$\pi = 4\,\arctan(1)\,.$$

Falls man in einem Programm den Wert $\pi$ benötigt und ihn über diese Formel als Programmkonstante definiert, kann man – eine saubere Implementierung der Arkusfunktionen vorausgesetzt – sicher sein, daß $\pi$

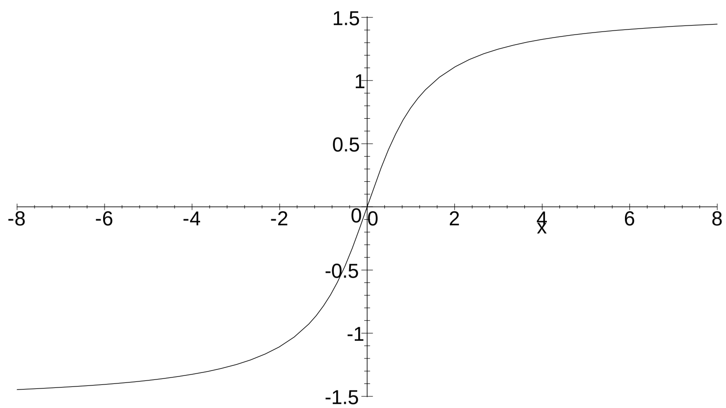


Abb. 50: Der Arkustangens

mit der maximal möglichen Stellenzahl der jeweiligen Gleitkommaarithmetik dargestellt wird – ohne daß man diese Stellenzahl oder gar $\pi$ mit der entsprechenden Genauigkeit zu kennen braucht.

Abgesehen vom gerade definierten Hauptwert lassen sich natürlich noch in offensichtlicher Weise weitere Zweige definieren; wir wollen hier auf Einzelheiten verzichten. Der Leser sollte sich allerdings klarmachen, daß es beispielsweise für den Arkussinus sowohl monoton wachsende als auch monoton fallende Zweige gibt.

Mit Hilfe der Arkusfunktionen lassen sich die Polarkoordinatendarstellung und die kartesische Darstellung der komplexen Zahlen ineinander umrechnen: Da $z = re^{i\varphi}$ Realteil $x = r\cos\varphi$ und Imaginärteil $y = r\sin\varphi$ hat, sollte außer der bereits bekannten Formel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für $z \neq 0$ auch so etwas wie

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arccos\frac{x}{r} = \arcsin\frac{y}{r}$$

gelten. Dies im Prinzip auch richtig, allerdings nicht immer für den Hauptwert: Da alle drei Umkehrfunktionen nur Werte in einem Intervall der Länge $\pi$ annehmen, während das Argument (genauer: der



Hauptwert des Arguments) einer komplexen Zahl im doppelt so langen Intervall $(-\pi, \pi]$ liegt, kann obige Gleichung bei keiner der drei Funktionen für alle $z$ gelten. Eine korrekte Formel mit dem Hauptwert des Arkuscosinus ist beispielsweise

$$\arg z = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{falls } \mathfrak{Im}\, z \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{falls } \mathfrak{Im}\, z < 0 \end{cases}.$$

Der für uns interessanteste Aspekt der Arkusfunktionen sind ihre *Ableitungen*, die uns neue, bislang unbekannte Stammfunktionen liefern sollen.

Wie in der Analysis I bei der Ableitung des Logarithmus gehen wir aus von der Formel

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$

für die Umkehrfunktion $g$ einer Funktion $f$. Da die Ableitung des Sinus der Cosinus ist, erhalten wir also

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Wegen $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ist

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2;$$

da der Cosinus im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$, in dem der Arkussinus seine Werte annimmt, größer oder gleich Null ist, folgt

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Genauso ist

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

da der Sinus zwischen 0 und $\pi$ keine negativen Werte annimmt.

Für den Arkustangens schließlich müssen wir zunächst Tangens selbst ableiten; nach der Quotientenregel ist

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

und dementsprechend

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Da sich die Ableitungen von Arkussinus und Arkuscosinus nur im Vorzeichen unterscheiden (was natürlich von vornherein klar war, da sich die Werte der beiden Funktionen stets zu $\pi/2$ ergänzen) sind als Stammfunktionen vor allem der Arkussinus und der Arkustangens interessant; wir haben die beiden neuen Formeln

$$\int \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\,.$$

Als nächstes wollen wir uns überlegen, wie wir die Integrale

$$\int \frac{dx}{1-x^2}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

mit dem jeweils anderen Vorzeichen bekommen können. Eine offensichtliche Lösung besteht darin, einfach $x$ durch $ix$ zu ersetzen, und das legt es nahe, in Analogie zu den EULERschen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

neue Funktionen

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

zu definieren, den *Cosinus hyperbolicus* und den *Sinus hyperbolicus.*

Der Zusatz *hyperbolicus* läßt sich leicht verstehen: Genau wie der gewöhnliche Sinus und Cosinus als *Kreisfunktionen* bezeichnet werden, weil die Punkte $(\sin t, \cos t)$ auf dem Kreis $x^2+y^2=1$ liegen, haben die Hyperbelfunktionen ihren Namen daher, daß

$$\begin{aligned}\cosh^2 t - \sinh^2 t &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4} = 1\end{aligned}$$



ist, so daß die Punkte $(\cosh t, \sinh t)$ auf der Hyperbel $x^2-y^2=1$ liegen, d.h

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist insbesondere $\cosh^2 x$ stets $\geq 1$; da der Cosinus hyperbolicus genau wie die beiden Exponentialfunktionen, aus denen er zusammengesetz ist, keine negativen Werte annehmen kann, folgt also

$$\cosh x \geq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Sofort aus der Definition folgen die Ableitungsregeln

$$\cosh'(x) = \sinh x \quad \text{und} \quad \sinh' x = \cosh x\,;$$

auf Grund obiger Ungleichung ist daher der Sinus hyperbolicus monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. Man sieht leicht, daß sein Vorzeichen jeweils das von $x$ ist (Insbesondere ist also auch $\sinh 0 = 0$.), d.h. der Cosinus hyperbolicus ist monoton fallend für negative und monoton steigend für positive $x$.

Für große Werte von $x$ wird $e^{-x}$ beliebig klein, sowohl $\sinh x$ als auch $\cosh x$ unterscheiden sich für solche Werte also beliebig wenig von $\frac12 e^x$ und gehen insbesondere gegen unendlich. Für stark negative Werte wird $e^x$ beliebig klein und das Verhalten beider Funktionen wird dominiert durch den Term $\pm e^{-x}$. Daher geht $\sinh x$ für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und $\cosh x$ gegen $+\infty$. Offensichtlich ist $\sinh x$ eine ungerade, $\cosh x$ aber eine gerade Funktion. In Abbildung 51 sind gestrichelt auch noch die Funktionen $\frac12 e^x$ im positiven und $\pm\frac12 e^{-x}$ im negativen Bereich eingezeichnet; wie man sieht, ist die Übereinstimmung mit $\sinh x$ *bzw.* $\cosh x$ schon ab etwa $|x| \geq 2$ recht gut.

Der Graph des Cosinus hyperbolicus erinnert an eine durchhängende Kette, und tatsächlich kann die Variationsrechnung zeigen, daß eine Kette mit reibungsfrei gegeneinander beweglichen Gliedern genau diese Form hat.

In völliger Analogie zum Tangens definieren wir auch noch einen *Tangens hyperbolicus* durch die Vorschrift

$$\tanh x \underset{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,;$$

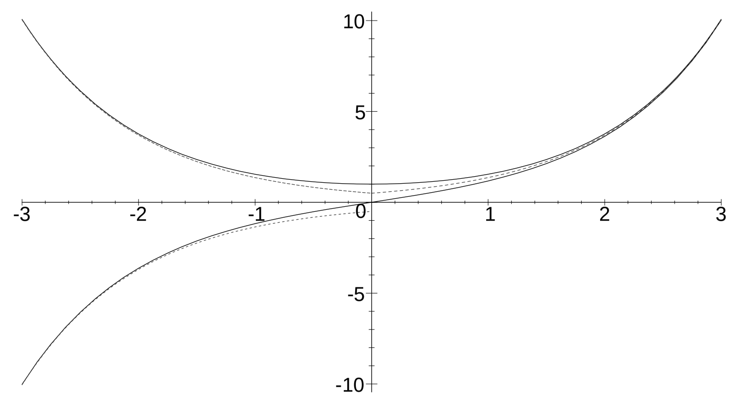


Abb. 51: Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

da der Cosinus hyperbolicus stets größer oder gleich eins ist, kann der Nenner nie Null werden, so daß die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Dabei ist

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-x})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-x}} = 1$$

und entsprechend

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -1\,.$$

Die Ableitung des Tangens hyperbolicus ist nach der Quotientenregel

$$\tanh' x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2 x} & \text{nach obiger Formel} \\ 1 - \tanh^2 x & \text{durch Ausdividieren} \end{cases},$$

wobei wie beim Tangens je nach Anwendung mal die eine, mal die andere Form des Ergebnisses nützlicher ist.

Aus beiden Ausdrücken sieht man sofort, daß die Ableitung stets positiv ist, der Tangens hyperbolicus steigt also monoton von $-1$ nach $+1$, wobei beide Werte nur asymptotisch angenommen werden.



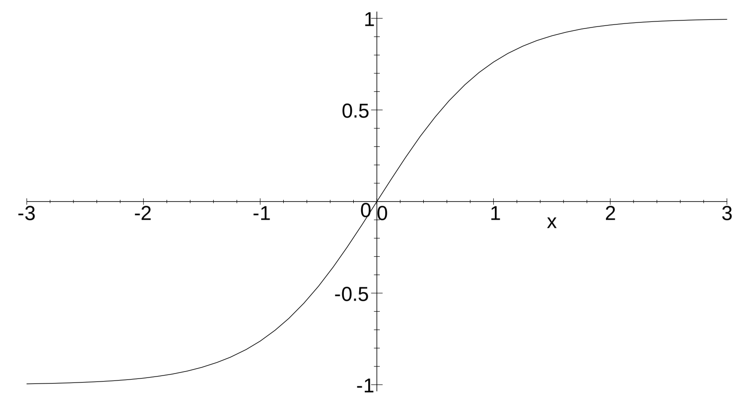


Abb. 52: Der Tangens hyperbolicus

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden als *Areafunktionen* bezeichnet und heißen *Areasinus hyperbolicus*, *Areacosinus hyperbolicus* und *Areatangens hyperbolicus.*

Aus obiger Diskussion folgt, daß der Areasinus hyperbolicus

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und der Areatangens hyperbolicus

$$\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$$

nur auf dem offenen Einheitsintervall. Der Cosinus hyperbolicus hat keine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion, da er für positive und für negative Argumente jeweils denselben Wert annimmt. Wir definieren den Areacosinus hyperbolicus

$$\operatorname{arcosh}\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

als die Umkehrfunktion des positiven Zweigs.

Da Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus asymptotisch wie eine Exponentialfunktion ansteigend, steigen Areasinus hyperbolicus und Areacosinus hyperbolicus wie Logarithmen, also sehr langsam.

Auch diese Funktionen sind wieder vor allem wegen ihrer Ableitungen interessant; eine weitgehend zum Fall der Arkusfunktionen analoge

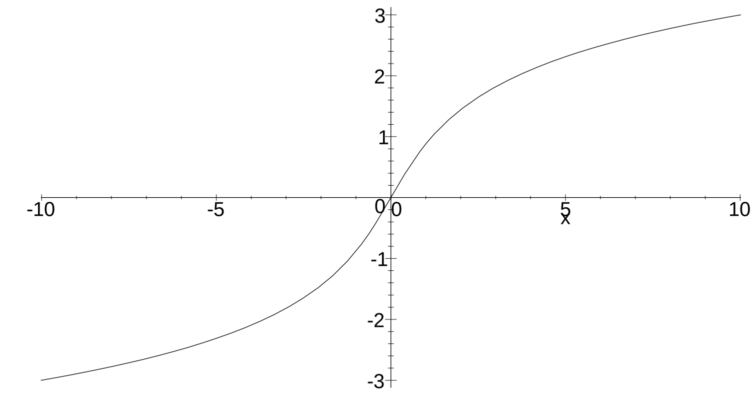


Abb. 53: Der Areasinus hyperbolicus

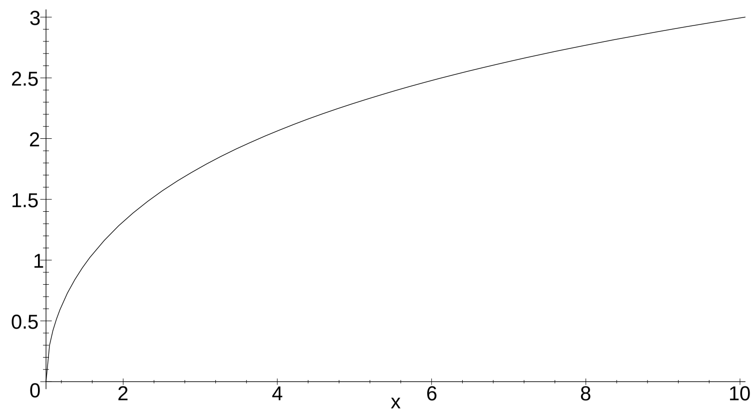


Abb. 54: Der Areacosinus hyperbolicus

Rechnung zeigt, daß

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

und

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$



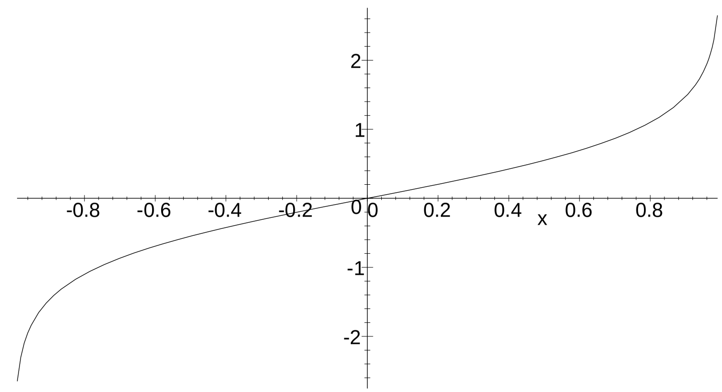


Abb. 55: Der Areatangens hyperbolicus

ist. Für den Areatangens hyperbolicus schließlich ist

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh} x)} = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Dies führt also auf die neuen Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh}(x) + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + C$$

und

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x) + C\,.$$

Die letztere wird allerdings nicht unbedingt gebraucht, denn da

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

ist, können wir dieses Integral auch ausrechnen als

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\ln|1-x| + \ln|1+x|}{2} + C\,,$$

wobei diese Formel noch den Vorteil eines größeren Definitionsbereichs hat.

## g) Partielle Integration

Eine wichtige Regel der Differentialrechnung ist die *Produktregel*

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Für die Zwecke der Integralrechnung schreiben wir sie besser als

$$f'(x)g(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) - f(x)g'(x)\,,$$

was integriert auf

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

führt – die Regel der partiellen Integration. Sie ist dann nützlich, wenn sich der Integrand als Produkt schreiben läßt, wobei einer der Faktoren eine bekannte Stammfunktion hat; gelegentlich ist dann das Produkt $f(x)g'(x)$ leichter integrierbar als $f'(x)g(x)$.

Mit den wenigen Funktionen, die wir bislang kennen, lassen sich nur wenige interessante Beispiele konstruieren; die volle Kraft dieser Regel werden wir erst später kennenlernen, wenn wir unser Repertoire an Funktionen erweitert haben. Hier sei nur $\int xe^x\,dx$ betrachtet: Da die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung und Stammfunktion ist, empfiehlt sie sich für die Rolle der Funktion $f$, während $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$ auf Vereinfachungen auf der rechten Seite hoffen läßt. In der Tat führt partielle Integration mit

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

auf eine Stammfunktion. Genauso lassen sich rekursiv auch die Integrale $\int x^n e^x\,dx$ berechnen:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

und

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx\,.$$



## h) Substitutionsregel

Auch die Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

läßt sich umschreiben zu einer Integrationsregel, der *Substitutionsregel*

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C\,,$$

wobei $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

Diese Regel dürfte wohl meist der erfolgversprechendste Versuch zum Auffinden einer Stammfunktion sein – vor allem, wenn man sie von rechts nach links liest, um für eine bekannte Funktion $f$ die unbekannte Stammfunktion $F$ zu berechnen. Als Substitution $g$ wählt man hier eine „geeignete“ bijektive Funktion, die zu einer Vereinfachung auf der linken Seite führt.

***1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen:*** Für $f(x) = 1/x$ führt die Substitutionsregel

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

zur Integrationsregel

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C\,.$$

Als erste Anwendung betrachten wir

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{g'(x)}{g(x)}$$

mit $g(x) = \cos x$. Nach der gerade bewiesenen Regel ist daher

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos(x)| + C\,,$$

eine Funktion, die genau wie der Tangens selbst an den Nullstellen der Cosinusfunktion nicht definiert ist.

Beim Tangens hyperbolicus gibt es keine Probleme mit dem Vorzeichen; hier ist ganz entsprechend

$$\int \tanh x\,dx = \ln\left|\cosh(x)\right| + C = \ln\cosh(x) + C\,,$$

da der Cosinus hyperbolicus nur positive Werte annimmt.

Auch Integrale wie

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

lassen sich nach dieser Regel ausrechnen: Da die Ableitung des Nenners $2x$ ist, folgt

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

Damit können wir dann beispielsweise den Arkustangens integrieren: Partielle Integration zeigt, daß

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arctan x\,dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + C\\ &= x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

ist.

***2) Substitutionen mit linearen Funktionen:*** Eine der elementarsten Anwendungen der Substitutionsregel, auf die man üblicherweise auch ohne diese Regel kommt, ist die Substitution mit linearen Funktionen $g(x) = ax + b$; hier besagt die Substitutionsregel, daß

$$\int f(ax+b)\cdot a\,dx = F(ax+b) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

ist, oder besser

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)\,.$$

Somit ist beispielsweise

$$\int \sin(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{-\cos(\omega t+\varphi)}{\omega} + C$$



oder

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

Entsprechend berechnet man auch

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

und sogar ganz allgemein $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$:

Da der Fall $a = 0$ uninteressant ist (*bzw.* eine unbedingt notwendige Übungsaufgabe für alle, die nicht sofort einsehen warum), schließen wir dies aus und schreiben

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}\,.$$

Mit

$$y = x + \frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad d = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$$

ist dann

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2+d}\\ &= \frac{1}{a}\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{d}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{d}}\right) + C & \text{falls } d > 0\\ \frac{-1}{y} & \text{falls } d = 0\\ \frac{1}{\sqrt{-d}}\operatorname{artanh}\left(\frac{y}{\sqrt{-d}}\right) + C & \text{falls } d < 0\,,\end{cases}\end{aligned}$$

und je nach Vorzeichen von $d$ kann dies entweder über eine der obigen Formeln oder (für $d = 0$) elementar ausgerechnet werden. Insgesamt erhalten wir mit $\Delta = b^2 - 4ac$ (und damit $d = -\Delta/4a^2$)

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C & \text{falls } \Delta < 0\\ \frac{-2}{2ax+b} + C & \text{falls } \Delta = 0\\ \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{artanh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C & \text{falls } \Delta > 0\,.\end{cases}$$

***3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen:*** Wegen der Beziehungen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{und} \quad \cosh^2 - \sinh^2 x = 1$$

bieten sich Substitutionen mit trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen an bei Integralen, in denen Ausdrücke der Form $\sqrt{1 \pm x^2}$ und ähnliche vorkommen.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel die Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ selbst. Mit der Substitution $x = \sin t$ mit $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ erhalten wir (durch Rückwärtslesen der Substitutionsregel)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\,,$$

und dies ist $\int \cos^2 t\,dt$, da Cosinus zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ nur nichtnegative Werte annimmt.

Dieses Integral kennen wir von Aufgabe *1b)* des dritten Übungsblatts:

$$\int \cos^2 t\,dt = \tfrac{1}{2}(\sin t\cos t + t) + C\,.$$

Mit der Rücksubstitution $t = \arcsin x$ erhalten wir schließlich nach der kurzen Nebenrechnung

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

das Ergebnis

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C\,.$$

Aus ähnliche Weise läßt sich auch die Stammfunktion von $\sqrt{1+x^2}$ bestimmen: Hier bietet sich die Substitution $x = \sinh t$ an und wir erhalten

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sinh^2 t}\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt\,,$$

da $\cosh t$ nur positive Werte annimmt.

Leider kennen wir das rechtsstehende Integral noch nicht; angesichts der großen Ähnlichkeiten zwischen trigonometrischen Funktionen und



Hyperbelfunktionen lohnt es sich aber sicherlich, als ersten Ansatz vor einer partiellen Integration zu schauen, ob vielleicht etwas analoges gilt wie oben. In der Tat ist nach der Produktregel

$$\frac{d}{dt}\tfrac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t) = \cosh^2 t + C\,,$$

also

$$\int \cosh^2 t\,dt = \tfrac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t) + C\,.$$

Somit ist

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x) + C\,.$$

Als letztes Beispiel, in dem $x$ einmal nicht quadratisch vorkommt, betrachten wir noch

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\,.$$

Da es in diesem Abschnitt um Substitutionen mit trigonometrischen Funktionen geht, versuchen wir es wieder mit dem Ansatz $x = \sin t$ für $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ und erhalten

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cos t\,dt\,.$$

Hier hilft nun ein Trick weiter: Erweitern wir den Bruch unter der Quadratwurzel mit $1-\sin t$, so wird das Integral zu

$$\int \sqrt{\frac{(1-\sin t)^2}{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int \frac{1-\sin t}{\cos t}\cos t\,dt = \int (1-\sin t)\,dt$$
$$= t + \cos t + C\,.$$

Damit ist

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \arcsin x + \cos(\arcsin x) + C$$
$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Bei einem so komplizierten Integral empfiehlt es sich, das Ergebnis durch Differentiation zu überprüfen; wir erhalten

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

was zunächst so aussieht, als sei irgend etwas falsch gelaufen. Beachtet man aber, daß

$$\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$$

ist, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,,$$

was erheblich vertrauenserweckender aussieht.

***4) Integrale der Form $\int h(e^{ax})\,dx$:*** Bei solchen Integralen führt oft die Substitution $u = e^{ax}$ oder, anders ausgedrückt, $x = g(u) = \frac{1}{a}\ln u$ zu einer Vereinfachung. Die Substitutionsregel

$$\int f\big(g(u)\big)g'(u)\,du = \int f(x)\,dx$$

wird wegen $g'(u) = \dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{au}$ zu

$$\int h(u)\,\frac{du}{au} = \int h(e^{ax})\,dx\,;$$

insbesondere wird das Integral also bei rationalem $h$ auf ein Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt, und dieses kann nach dem im nächsten Abschnitt skizzierten Verfahren der Partialbruchzerlegung berechnet werden.

Im allgemeinen schreibt man eine Substitution wie die obige kurz in der Form

$$u = e^{ax}, \quad dx = \frac{du}{au}\,,$$

wobei man letztere Beziehung auch aus

$$\frac{du}{dx} = ae^{ax} = au \quad \text{oder} \quad du = au\,dx$$



herleiten kann.

Betrachten wir als Beispiel das Integral $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx$: Da sowohl $e^{2x}$ als auch $e^{3x}$ im Integranden vorkommen, empfiehlt sich die Substitution $u = e^x$ mit $du = u\,dx$; damit wird

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{u^3}{u^2-1}\,\frac{du}{u} = \int \frac{u^2}{u^2-1}\,du\,,$$

und wir sind beim Integral einer rationalen Funktion angelangt. Elementare Bruchrechnung zeigt, daß

$$\frac{u^2}{u^2-1} = 1 + \frac{1}{u^2-1} = 1 + \frac{\frac12}{u-1} - \frac{\frac12}{u+1}\,,$$

d.h.

$$\frac{u^2}{u^2-1}\,du = \int du + \tfrac12\left(\int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1}\right) = u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C\,.$$

(Für komplizierte Funktionen werden wir im nächsten Abschnitt ein Verfahren kennenlernen, daß rationale Funktionen in Summen aus einfachen Summanden zerlegt.)

Nun muß nur noch die Substitution $u = e^x$ rückgängig gemacht werden, und wir erhalten als Ergebnis

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx = e^x + \tfrac12\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C\,.$$

Dieselbe Technik funktioniert natürlich auch bei Integralen über Hyperbelfunktionen, da man diese genausogut als Ausdrücke in Exponentialfunktionen schreiben kann. Beispielsweise ist

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = 2\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = 2\int \frac{du}{u\left(u-\frac1u\right)} = 2\int \frac{du}{u^2-1}$$
$$= \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C\,.$$

***5) Integrale der Form*** $\int h(\sin x, \cos x)\,dx$***:*** Als letzte Anwendung der Substitutionsregel in diesem Abschnitt wollen wir noch Integrale betrachten, die von trigonometrischen Funktionen abhängen. Hier führt oft die Substitution

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

zum Erfolg; sie macht $\sin x$ zu $\sin(2\arctan t)$ und $\cos x$ zu $\cos(2\arctan t)$, was wir wie folgt ausrechnen können: Aus

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

folgt, daß

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

ist und somit

$$\cos(2\arctan t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Da der Arkustangens nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, liegt $2\arctan t$ zwischen $-\pi$ und $\pi$, ein Intervall, in dem der Sinus dasselbe Vorzeichen hat wie sein Argument. Daher ist

$$\sin(2\arctan t) = \sqrt{1-\cos^2(2\arctan t)} = \sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Als Beispiel betrachten wir

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1}.$$

Das letzte Integral kennen wir:

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C.$$

Also ist

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + C.$$



## i) Integration rationaler Funktionen

Bekanntlich ist ein Polynom in $x$ ein Ausdruck der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\,;$$

ist $a_n \neq 0$, so bezeichnet man $n$ als den *Grad* des Polynoms, in Zeichen

$$n = \deg f\,.$$

Polynome vom Grad eins, zwei, drei *bzw.* vier heißen linear, quadratisch, kubisch *bzw.* biquadratisch.

Unter einer *rationalen Funktion* versteht man eine Funktion der Form

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynome sind. Es ist klar, daß diese Funktion nur in jenen Punkten $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, in denen $g(x) \neq 0$ ist.

Die Integrationstheorie rationaler Funktionen ist seit langem bekannt; im Prinzip kann man zu jeder rationalen Funktion eine Stammfunktion angeben, indem man wie folgt vorgeht: (Auf Einzelheiten und Beweise muß hier weitgehend verzichtet werden, da wir nicht über das notwendige mathematische Instrumentarium verfügen.)

***1. Schritt:*** Man zerlege den Nenner in ein Produkt aus linearen und quadratischen Polynomen. Die ist zumindest grundsätzlich möglich, denn nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* läßt sich ein Polynom vom Grad $n$ (mir reellen oder komplexen Koeffizienten) stets in der Form

$$g(x) = a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdot\cdots\cdot(x-z_n)$$

schreiben, wobei die *komplexen* Zahlen $z_i$ die Nullstellen von $g$ sind. Wie man sich leicht überlegt, folgt für ein reelles Polynom $g$ aus $g(z)=0$ sofort, daß auch $g(\overline{z})=0$ ist, d.h. die nichtreellen Nullstellen treten als Paare konjugiert komplexer Zahlen auf, die auch jeweils die gleiche Vielfachheit haben, da letztere über das Verschwinden von Ableitungen definiert werden kann.

Das Produkt der Linearfaktoren zu zwei konjugiert komplexen Zahlen ist

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z} = x^2 - 2\,\mathfrak{Re}\,z \cdot x + |z|^2 ,$$

ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten. Also läßt sich $g(x)$ als Produkt linearer und quadratischer Polynome mit reellen Koeffizienten schreiben. Faßt man gleiche Faktoren zusammen, so erhält man demnach eine Darstellung

$$g(x) = a_n \ell_1(x)^{e_1} \cdot \dots \cdot \ell_r(x)^{e_r} \cdot q_1(x)^{f_1} \cdot \dots \cdot q_s(x)^{f_s}$$

mit linearen Polynomen $\ell_i$, quadratischen Polynomen $q_j$ und natürlichen Zahlen $e_i, f_j$. Dabei sind sowohl die $\ell_i$ als auch die $q_j$ paarweise voneinander verschieden.

Diese Zerlegung kann algorithmisch selbst bei Polynomen mit rationalen Koeffizienten algorithmisch sehr aufwendig sein; daher kommt der obige Zusatz „im Prinzip“ für die Durchführbarkeit der Integration rationaler Funktionen.

***2. Schritt:*** Man schreibe die Funktion $f(x)/g(x)$ als Summe eines Polynoms und von *Partialbrüchen* der Form

$$\frac{\alpha_{ik}}{\ell_i(x)^k} \quad \text{und} \quad \frac{\beta_{jk}x + \gamma_{jk}}{q_j(x)^k} ,$$

wobei $k$ von eins bis $e_i$ *bzw.* $f_j$ läuft und $\alpha_{ik}, \beta_{jk}$ und $\gamma_{jk}$ reelle Zahlen sind, d.h.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{e_i} \frac{\alpha_{ik}}{\ell_i(x)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{f_j} \frac{\beta_{jk}x + \gamma_{jk}}{q_j(x)^k} .$$

Wir müssen uns zunächst überlegen, warum das möglich ist:

Beginnen wir mit zwei teilerfremden Polynomen $p(x)$ und $q(x)$. Der erweiterte EUKLIDische Algorithmus aus Kapitel I, §2*e)* liefert dazu neue Polynome $\alpha(x), \beta(x)$, so daß

$$\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) = 1$$



ist und damit

$$\frac{1}{p(x)q(x)} = \frac{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)}{p(x)q(x)} = \frac{\alpha(x)}{q(x)} + \frac{\beta(x)}{p(x)} .$$

Ist ein drittes Polynom $r(x)$ teilerfremd sowohl zu $p(x)$ als auch zu $q(x)$, sind insbesondere auch $p(x)q(x)$ und $r(x)$ teilerfremd; es gibt also eine Darstellung

$$\frac{1}{p(x)q(x)r(x)} = \frac{\phi(x)}{p(x)q(x)} + \frac{\psi(x)}{r(x)} = \frac{\phi(x)\alpha(x)}{q(x)} + \frac{\phi(x)\beta(x)}{p(x)} + \frac{\psi(x)}{r(x)}$$

mit zwei neuen Polynomen $\phi(x)$ und $\psi(x)$, insgesamt also wieder eine Summe dreier Brüche mit den drei Faktoren $p(x), q(x)$ und $r(x)$ als Nennern.

Induktiv folgt auf diese Weise, daß es zu $n$ paarweise teilerfremden Polynomen $p_1(x), \dots, p_n(x)$ stets Polynome $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ gibt, so daß

$$\frac{1}{p_1(x) \cdots p_n(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{p_1(x)} + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{p_n(x)}$$

ist. Für ein beliebiges weiteres Polynom ist daher auch

$$\frac{f(x)}{p_1(x) \cdots p_n(x)} = \frac{\alpha_1(x)f(x)}{p_1(x)} + \dots + \frac{\alpha_n(x)f(x)}{p_n(x)} .$$

Dies wenden wir an auf die obige Zerlegung des Nenners $g$: Da die $\ell_i(x)$ und die $q_j(x)$ paarweise teilerfremd sind, gilt dasselbe auch für ihre Potenzprodukte, es gibt also Polynome $\varphi_i(x), \psi_j(x)$, so daß gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\varphi_i(x)}{\ell_i(x)^{e_i}} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\psi_j(x)}{q_j(x)^{f_j}} .$$

Um den Grad dieser Polynome zu reduzieren, dividieren wir für jeden Bruch den Zähler mit Rest durch den Nenner und fassen die Quotientenpolynome zusammen zu einem einzigen Polynom $Q(x)$. Damit erhalten wir eine neue Darstellung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\widetilde{\varphi}_i(x)}{\ell_i(x)^{e_i}} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\widetilde{\psi}_j(x)}{q_j(x)^{f_j}} ,$$

in der jeder Zähler $\widetilde{\varphi}_i(x)$ und $\widetilde{\psi}_j(x)$ kleineren Grad hat als der zugehörige Nenner.

Zur weiteren Zerlegung der Zähler überlegen wir uns zunächst, daß es zu je zwei Polynomen $\varphi(x)$ und $g(x)$ eine Darstellung

$$\varphi(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)g(x) + \alpha_2 g(x)^2 + \cdots$$

gibt mit $\deg \alpha_i(x) < \deg g(x)$. (Für ein lineares Polynom $g(x) = x - a$ ist das gerade die TAYLOR-Entwicklung von $\varphi$ im Punkt $a$.) Für $\alpha_0(x)$ nehmen wir dazu den Divisionsrest von $\varphi(x)$ durch $g(x)$; ist $q_0(x)$ der Quotient, gilt dann

$$g(x) = \alpha_0(x) + g(x)q_0(x)\,.$$

Ist nun $q_1$ der Quotient und $\alpha_1$ der Rest bei der Division von $q_0$ durch $g$, so erhalten wir die neue Darstellung

$$g(x) = \alpha_0(x) + g(x)\big(\alpha_1(x) + g(x)q_1(x)\big) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)g(x) + q_1(x)g(x)^2\,.$$

$\alpha_2(x)$ ist nun entsprechend der Divisionsrest von $q_1(x)$ durch $g(x)$ und so weiter, bis ein Quotient $q_\nu(x)$ kleineren Grad als $g(x)$ hat und damit der letzte Koeffizient $\alpha_{\nu+1}(x)$ ist.

Ist $g(x)$ ein lineares Polynom, haben alle $\alpha_\nu(x)$ kleineren Grad als eins, sind also Konstanten. Da $\deg \widetilde{\varphi}(x) < \deg \ell_i^{e_i} = e_i$ ist, können wir also schreiben

$$\widetilde{\varphi}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \ell_i(x) + \cdots + \alpha_{e_i-1}\ell_i(x)^{e_i-1}$$

mit reellen Zahlen $\alpha_\nu$, und

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\varphi}(x)}{\ell_i(x)^{e_i}} &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1\ell_i(x) + \cdots + \alpha_{e_i-1}\ell_i(x)^{e_i-1}}{\ell_i(x)^{e_i-1}}\\ &= \frac{\alpha_0}{\ell_i(x)^{e_i}} + \frac{\alpha_1}{\ell_i(x)^{e_i-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{e_i-1}}{\ell_i(x)}\,.\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir die Darstellungen

$$\frac{\widetilde{\psi}(x)}{q_i(x)^{f_i}} = \frac{\beta_0 x + \gamma_0}{q_i(x)^{f_i}} + \frac{\beta_1 x}{q_i(x)^{f_i-1}} + \cdots + \frac{\beta_{f_i-1}x + \gamma_{f_i-1}}{q_i(x)}\,.$$



Faßt man alles zusammen und gibt den Zählern die richtigen Indizes, erhält man die oben angegebene Zerlegung, die sogenannte *Partialbruchzerlegung.*

Der gerade durchgeführte Beweis ist zwar (bei einer gegebenen Zerlegung des Nenners) konstruktiv, das verwendete Verfahren ist allerdings nicht besonders effizient. Nachdem wir wissen, daß eine Zerlegung wie oben existiert und auch alle Nenner kennen, ist es beispielsweise erheblich einfacher, von der obigen Zerlegung auszugehen (mit unbestimmten Zählern) und die Partialbrüche nach den üblichen Regeln der Bruchrechnung zu addieren. Der Nenner des entstehenden Bruchs ist $g(x)$, der Zähler $f(x) - Q(x)g(x)$, wobei $Q(x)$ der Quotient bei der Division von $f(x)$ durch $g(x)$ ist. Der durch Addition der Partialbrüche berechnete Zähler ist eine lineare Funktion in den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma$; Koeffizientenvergleich mit $f(x) - Q(x)q(x)$ liefert ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten, das wir schnell und einfach nach GAUSS lösen können.

Für Linearfaktoren $\ell_i(x)$, die nur in der ersten Potenz vorkommen, gibt es sogar ein noch einfacheres Verfahren: Ist $x_i$ die (einzige) Nullstelle von $\ell_i(x)$, so überlegt man sich leicht (durch Addition der Partialbrüche und des polynomialen Anteils), daß

$$\alpha_i = \lim_{x\to x_i} \frac{(x-x_i)f(x)}{g(x)}$$

ist. Da Zähler und Nenner für $x = x_i$ verschwinden, muß dieser Grenzwert nach DE L'HOSPITAL berechnet werden; wir erhalten

$$\alpha_i = \lim_{x\to x_i} \frac{(x-x_i)f'(x) - f(x)}{g'(x)} = -\frac{f(x_i)}{g'(x_i)}\,,$$

wobei hier der Nenner nicht verschwinden kann, da $x_i$ nur eine einfache Nullstelle von $g$ ist.

***3. Schritt:*** Integration der Partialbrüche: Die Integrale der Funktionen $\frac{\alpha_{ik}}{\ell_i(x)^k}$ lassen sich über die Substitution $u = \ell_i(x)$ sofort auf $\int \frac{du}{u^k}$ zurückführen und sind somit problemlos. Weiter ist

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{\beta}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\,dx + \int \frac{\gamma - \frac{\beta b}{2a}}{ax^2 + bx + c}\,dx\,,$$

wobei das erste Integral nach der Regel über die logarithmische Ableitung aus Abschnitt *a)* berechnet werden kann, während wir das zweite in Abschnitt *b)* behandelt haben.

Bleiben schließlich noch die Integrale mit Potenzen eines quadratischen Polynoms im Nenner; hier wird $k$ durch partielle Integration rekursiv erniedrigt.

Als ganz einfaches Beispiel, in dem alles explizit durchführbar ist, betrachten wir

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}\,.$$

Da hier sechs das Produkt und fünf die Summe der Nullstellen des Nenners ist, errät man leicht, daß $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ ist. Die Partialbruchzerlegung bestimmen wir nun durch probieren: Da

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{(x-3)-(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)(x-3)}$$

ist, folgt

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C\,.$$

## j) Symmetrie

Bei bestimmten Integralen kann man sich gelegentlich einen Großteil der Mühe des Ausrechnens ersparen, indem man Symmetrien berücksichtigt: Ist etwa die Funktion $f$ spiegelsymmetrisch zur Achse $x = c$, d.h. $f(c+x) = f(c-x)$ für alle $x$, für die beide Seiten definiert sind, so ist auch

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_{c-a}^{c} f(x)\,dx\,,$$

d.h.

$$\int_{c-a}^{c+a} f(x)\,dx = 2\int_c^{c+a} f(x)\,dx\,.$$



Viel interessanter wird es, wenn $f$ *punktsymmetrisch* zu einem Punkt $(c, 0)$ auf der $x$-Achse ist, d.h. $f(c+x) = -f(c-x)$. Dann ist

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = -\int_{c-a}^{c} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{c-a}^{c+a} f(x)\,dx = 0\,,$$

ohne daß man irgendetwas über die Stammfunktion von $f$ wissen müßte. So ist beispielsweise

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{|x|}\,dx = 0\,,$$

aber ein Leser, der mit den uns bislang bekannten Methoden nach einer Stammfunktion suchen möchte, dürfte eine sehr harte Zeit und wenig Erfolg haben.

## k) Einige nicht elementar integrierbare Funktionen

Tatsächlich ist die Stammfunktion von $\dfrac{\sin x}{x}$ nicht durch elementare transzendenten Funktionen wie die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen sowie deren Umkehrfunktionen und/oder Wurzeln und Grundrechenarten darstellbar, und sie teilt diese Eigenschaft mit einer ganzen Reihe weiterer Stammfunktionen.

Da einige dieser Stammfunktionen trotzdem für Anwendungen wichtig sind, behilft man sich damit, daß man einigen speziellen dieser Funktionen Namen gibt und versucht, alles darauf zurückzuführen. Die so definierten Funktionen können dann, genau wie der Sinus und die Exponentialfunktion, in Tabellenwerke und Unterprogrammbibliotheken aufgenommen werden, so daß man mit den dadurch abgedeckten Integralen genauso rechnen kann wie mit den elementaren transzendenten Funktionen.

Einige wichtige dieser neuen Funktionen sind

**_1) Der Integralsinus:_** Da $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ ist, ist das bestimmte Integral

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und eine stetige Funktion von $x$, der *Integralsinus*. Er ist beispielsweise wichtig für Tiefpaßfilterungen, wo Faltungsintegrale mit $\frac{\sin x}{x}$ berechnet werden können.

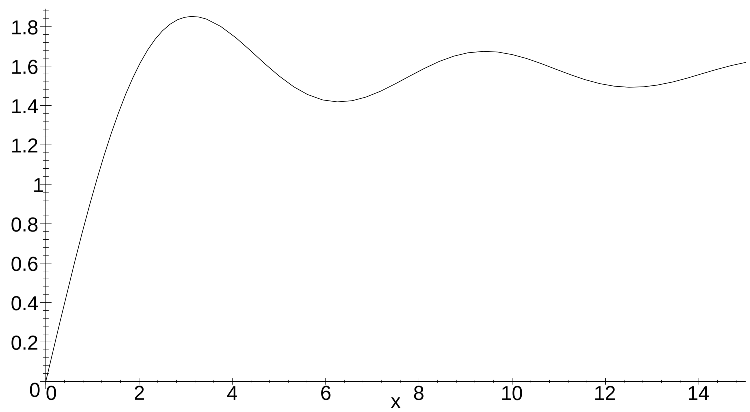


Abb. 56: Der Integralsinus

**_2) Die Fehlerfunktion:_** Auch die Funktion $e^{-x^2}$ hat keine elementar angebbare Stammfunktion; hier definiert man als eine Stammfunktion die *Fehlerfunktion* oder *error function* durch

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$$

(Der Vorfaktor sorgt dafür, daß $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Erf}(x) = 1$ ist, was wir im Augenblick allerdings noch nicht beweisen können.)

Sie ist wichtig für die Statistik, denn für eine normalverteilte Zufallsvariable (dazu gehören die meisten Meßgrößen) mit Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung $\sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Meßwert



zwischen $a$ und $b$ liegt, gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\,dx\,,$$

ein Integral, von dem man sich leicht überlegt, daß es mit Hilfe von Erf berechnet werden kann als

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\overline{x}-b}{\sigma}\right)\,.$$

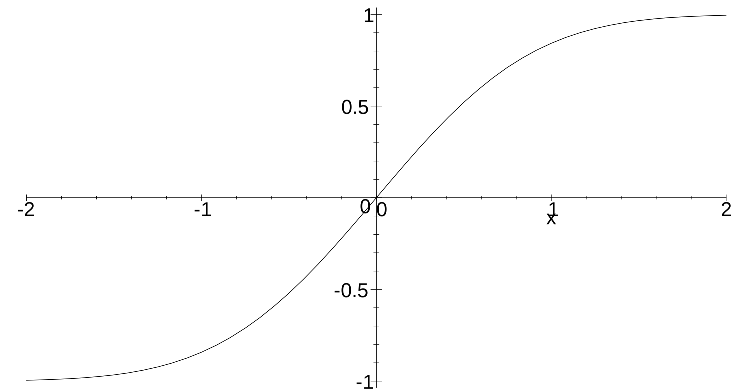


Abb. 57: Die Fehlerfunktion

**_3) Elliptische Integrale:_** Bei der Berechnung der Bogenlänge eines Ellipsensegments kommt man, je nach Art des Ansatzes und der Substitution, auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}}\,,$$

wobei das Polynom im Nenner keine mehrfachen Nullstellen hat, oder auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad \text{oder} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$$

mit $0 < k < 1$. Alle diese Integrale heißen *elliptische Integrale* und sind nicht elementar ausdrückbar. Eine hauptsächlich auf ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752–1833) und KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897) zurückgehende Theorie der elliptischen Funktionen stellt das Instrumentarium bereit, mit dem man diese vor allem in der Geodäsie, Kartographie und im Maschinenbau wichtigen Integrale berechnen kann.

***4) Algebraische Integrale:*** Die erste Form der elliptischen Integrale ist ein Spezialfall eines sogenannen algebraischen Integrals; das sind Integrale, deren Integranden durch Wurzeln und Grundrechenarten (oder allgemeiner implizit durch Lösungen von Polynomgleichungen) gegeben sind. Die komplizierteren dieser Integrale sind fast alle nicht elementar ausdrückbar; es gibt inzwischen algorithmische Verfahren, die entscheiden, wann ein solches Integral elementar ausdrückbar ist, und die dann auch eine Stammfunktion finden können. Natürlich gibt es auch hier spezielle Funktionen, mit denen sich weitere dieser Integrale ausdrücken lassen.

## l) Uneigentliche Integrale

Sei $a > 0$ und $b > a$. Dann ist für eine reelle Zahl $r \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}\Bigg|_a^b = \frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{a^{r-1}} - \frac{1}{b^{r-1}}\right).$$

Falls $r > 1$ ist, können wir hiervon den Grenzwert für $b$ gegen unendlich betrachten und es liegt nahe, diesen als Wert des Integrals von $a$ bis unendlich zu bezeichnen:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{r-1}\frac{1}{a^{r-1}} \quad \text{für} \quad r > 1\,.$$

Auch wenn wir nicht bis unendlich integrieren wollen, gibt es Beispiele von Integralen, denen wir via Grenzwertbetrachtung einen sinnvollen



Wert zuordnen können, ohne daß das Integral im Sinne unserer bisherigen Definitionen existieren würde: Beispielsweise ist für $a \le c < b$ und eine relle Zahl $0 < r < 1$

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^r} = \frac{(b-x)^{1-r}}{r-1}\Bigg|_a^c = \frac{(b-a)^{1-r}}{r-1} - \frac{(b-c)^{1-r}}{r-1}\,,$$

und auch hier liegt es nahe, den Grenzwert für $c \to b$ als Wert des Integrals von $a$ bis $b$ zu bezeichnen. Wir müssen hier allerdings vorsichtig sein mit dem Grenzübergang, denn die obige Formel gilt natürlich nur für $c < b$; für $c > b$ ist das Integral undefiniert. In einer solchen Situation können wir daher nicht den gewöhnlichen Limes betrachten, sondern brauchen einen eingeschränkten Grenzwertbegriff, der nur Folgen von einer der beiden Seiten berücksichtigt: Allgemein schreiben wir

$$y = \lim_{x\to b-} f(x)\,,$$

wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x$ mit $b - \delta < x < b$. (Zur Erinnerung: Beim gewöhnlichen Grenzwert fordert man dies für alle $x$ mit $|x - b| < \delta$, d.h. $b - \delta < x < b + \delta$.)

Völlig analog läßt sich natürlich auch ein rechtsseitiger Grenzwert

$$y = \lim_{x\to a+} f(x)$$

definieren durch die Bedingung, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x$ mit $b < x < b + \delta$.

Schließlich sollten wir, wenn wir schon beim Definieren sind, zur Bezeichnungsökonomie noch vereinbaren, daß halboffene Intervalle wie

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

auch für unendliche $b$ definiert sein sollen durch

$$[a, \infty) \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}\,;$$

entsprechend auch

$$(-\infty, b] \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \quad \text{und} \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}\,.$$

Für unendliche Intervallgrenzen sind die Definitionen für links- und rechtsseitige Grenzwerte nicht sinnvoll anwendbar; wir vereinbaren daher, daß für $b = \infty$ der Ausdruck $\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ für den gewöhnlichen Grenzwert $\lim\limits_{c\to\infty}$ stehen soll; entsprechend bei $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ für $a = -\infty$.

Mit all diesen Definitionen können wir dann eine Funktion $f$ betrachten, die in einem halboffenen Intervall $[a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert und stückweise stetig ist; für diese definieren wir das rechtsseitig uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert; andernfalls sagen wir, das Integral sei *divergent.*

Völlig analog definieren wir linksseitige uneigentliche Integrale: $f$ sei stückweise stetig auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ mit $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$; dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert; andernfalls sagen wir, das Integral sei *divergent.*

Diese Definitionen sind immer noch nicht allgemein genug: Eine Funktion könnte auch an *beiden* Enden eines Intervalls $(a, b)$ undefiniert sein, wobei wir auch die Sonderfälle $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ zulassen wollen, und zusätzlich könnte sie auch noch Undefiniertheitsstellen $c_1 < \cdots < c_r$ im Intervallinnern haben.

In diesem Fall läßt sich das Intervall so in Teilintervalle zerlegen, daß $f$ in jedem Teilintervall höchstens an *einem* der beiden Intervallenden uneigentlich ist: Falls es keine Undefiniertheitsstellen im Intervallinnern gibt, wählen wir willkürlich ein $c_0$ zwischen $a$ und $b$ und betrachten die beiden Intervalle $(a, c]$ und $[c, b)$. Im anderen Fall können zwei



Zusatzpunkte notwendig sein: ein Punkt $c_0$ zwischen $a$ und $c_1$ sowie ein Punkt $c_{r+1}$ zwischen $c_r$ und $b$.

Wir sagen dann, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiere, wenn *jedes* der Integrale

$$\int_a^{c_0} f(x)\,dx, \quad \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_{r+1}}^{b} f(x)\,dx$$

konvergiert; die Summe ihrer Werte bezeichnen wir als den Wert des Integrals von $a$ bis $b$.

Als Beispiel betrachten wir das an beiden Grenzen uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, empfiehlt es sich, das Integrationsintervall, das hier aus ganz $\mathbb{R}$ besteht, bei Null zu unterteilen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 2\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = 2(\lim_{c\to\infty} \arctan c - \arctan 0) = \pi\,.\end{aligned}$$

Obige Forderung, daß *jedes* der Teilintegrale einzeln konvergieren soll, ist gelegentlich etwas sehr restriktiv. Für das bei Null uneigentliche Integral

$$\int_{-2}^{4} \frac{dx}{x^3}$$

könnte man etwa argumentieren, daß der Integrand eine ungerade Funktion ist, so daß aus Symmetriegründen das Integral von $-2$ bis 2 verschwinden sollte und

$$\int_{-2}^{4} \frac{dx}{x^3} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3} + \int_{2}^{4} \frac{dx}{x^3} = 0 + \frac{3}{32} = \frac{3}{32}$$

sein sollte. Diese Art der Argumentation ist durch das, was wir bislang gelernt haben, nicht gedeckt, und es gibt auch gute Gründe, sie zu verbieten: Schließlich geht die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2}$ für $x \to 0$ gegen minus unendlich, und wenn eine Größe mit Relevanz in der realen Welt unendlich groß wird, hat dies im Allgemeinen zu gravierende Konsequenzen, als daß man einfach durch diesen Punkt hindurch weitergehen könnte.

Andererseits sind aber viele der mathematischen Formeln, die in den Naturwissenschaften und der Technik angewandt werden, nur näherungsweise gültig: Mathematische Modelle sind praktisch immer *vereinfachende* Modelle der Wirklichkeit, beispielsweite gilt das OHMsche Gesetz sicher nicht mehr, wenn man einen 5 Ω-Widerstand aus einer auf 5 V Spannung ausgelegten Schaltung im Hochspannungslabor mit 100 kV belastet, und es gilt auch nicht mehr ohne Korrekturterme, wenn man einen Wechselspannung mit 500 MHz anlegt.

Entsprechend gibt es durchaus Situationen, in denen das mathematische Modell einen unendlich großen Wert vorhersagt, wohingegen in der Realität limitierende Faktoren, die für Werte im „üblichen“ Größenbereich noch keine nennenswerte Rolle spielen, für eine Begrenzung sorgen. Falls man in einer solchen Situation sicher sein kann, daß auch in der realen Situation noch die Symmetrie zum Nullpunkt erhalten bleibt, kann man so wie oben argumentieren; falls allerdings die Symmetrie *nicht* erhalten bleibt, können durch die Begrenzung der Funktion beliebig große Abweichungen erzeugt werden, über die man mit dem vereinfachten mathematischen Modell nichts aussagen kann.

Da somit alles von der Anwendung abhängt, kann die Mathematik hier nicht mehr bieten als eine *Definition:* Falls für die Funktion $f$, die auf



$[a, c) \cup (c, b]$ definiert ist, der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \int_{a}^{c-h} f(x)\,dx + \int_{c-h}^{b} f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnen wir ihn als CAUCHYschen Hauptwert von $\int_a^b f(x)\,dx$ nach dem aus der Analysis I bekannten französischen Mathematiker Baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857). Entsprechend reden wir auch in komplizierteren Situationen mit mehreren Unstetigkeitsstellen vom CAUCHYschen Hauptwert, falls sich eine Aufteilung in Teilintervalle finden läßt, so daß für jedes Teilintervall der CAUCHYsche Hauptwert existiert. Im obigen Beispiel wäre also $\frac{3}{32}$ der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals, wohingegen das Integral selbst undefiniert ist.

Die Frage, wann der CAUCHYsche Hauptwert für ein eigentlich divergentes Integral verwendet werden sollte, ist keine mathematische Frage: Unter rein mathematischen Gesichtspunkten gibt es **nie** eine Rechtfertigung für die Verwendung des CAUCHYschen Hauptwerts. Der CAUCHYsche Hauptwert ist nur dann sinnvoll anwendbar, wenn man davon ausgeht, daß ein mathematisches Modell eine Situation nur für nicht zu große Funktionswerte (ungefähr) korrekt beschreibt, und wenn man gleichzeitig sicher ist, daß die Unendlichkeitsstelle des mathematischen Modells für die Anwendung unproblematisch ist und gleichzeitig die Symmetrie, die der Berechnung des CAUCHYschen Hauptwerts zugrundeliegt, auch in der realen Anwendung gilt.

Der CAUCHYsche Hauptwert darf auch *nie* als eine Rechtfertigung dafür verstanden werden, daß man unbesonnen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

setzt, wobei $F$ eine zwar in den Punkten $a$ und $b$, nicht aber auch für jeden Zwischenwert $a \le x \le b$ definierte Stammfunktion von $f$ ist: So etwas kann zu Ergebnissen wie

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1$$

führen, und natürlich ist keine Anwendung denkbar, in der eine negative Zahl in sinnvoller Weise als Integral über eine überall positive Funktion angesehen werden kann. In der Tat existiert im obigen Beispiel weder das Integral noch dessen CAUCHYscher Hauptwert, da sich die Unendlichkeiten links und rechts der Null hier nicht wegheben, sondern verstärken.

Zu einer etwas systematischeren Untersuchung uneigentlicher Integrale empfiehlt es sich, zunächst die Potenzen zu betrachten. Für positive Exponenten $r$ ist $x^r$ überall definiert, so daß Integrale über einen *endlichen* Bereich unproblematisch sind; für Integrale über einen *unendlichen* Bereich rechnet man leicht nach, daß sie immer divergieren. Für $r = 0$ ändert sich nichts an dieser Situation; interessant ist also nur der Fall $r < 0$, wo sowohl der Wert $x = 0$ als auch unendliche obere und/oder untere Grenzen zu Problemen führen können. Für negatives $r$ ist $x^r = 1/x^{-r}$, wir interessieren uns also für

$$\int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}\Big|_a^b \quad \text{für} \quad r > 0, \quad r \neq 1\,.$$

Für $a > 0$ und $b \to \infty$ existiert ein Grenzwert genau dann, wenn $r - 1 > 0$, also $r > 1$ ist; alsdann ist

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}\,.$$

Für $b > 0$ und $a \to \infty$ existiert ein Grenzwert genau dann, wenn $r - 1 < 0$, also $r < 1$ ist; alsdann ist

$$\int_0^b \frac{dx}{x^r} = \lim_{a\to 0} \int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{1-r} b^{1-r}\,.$$



Zusammen mit der Monotonieeigenschaft des RIEMANN-Integrals aus §3*a)* ergeben sich hieraus zwei allgemeine Kriterien für die Konvergenz uneigentlicher Integrale:

**Satz:** Die Funktion $f$ sei stetig für $x \geq a$ und $g$ sei stetig für $0 < x \leq b$. Dann gilt:

1.) Falls es eine reelle Zahl $K$ und eine reelle Zahl $r > 1$ gibt, so daß $|f(x)| \leq \frac{K}{x^r}$ ist, konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$.
2.) Falls es eine reelle Zahl $K$ und eine reelle Zahl $0 < r < 1$ gibt, so daß $|g(x)| \leq \frac{K}{x^r}$ ist, konvergiert $\int_0^b g(x)\,dx$.

*Beweis: 1.)* Nach der Monotonieregel ist für jedes $b \geq a$

$$\int_a^b |f(x)|\;dx \leq K \int_a^b \frac{dx}{x^r}\,,$$

und letzteres Integral konvergiert, wie wir gerade nachgerechnet haben, unter den angenommenen Voraussetzungen. Das linksstehende Integral ist somit beschränkt durch eine von $b$ unabhängige Konstante; da es wegen der Nichtnegativität des Betrags zusätzlich eine monoton wachsende Funktion von $b$ ist, existiert daher der Grenzwert nach dem bekannten, schon für die Existenz des RIEMANN-Integrals verwendeten Satz aus der Analysis I, wonach jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergent ist.

Genau dasselbe gilt für die ebenfalls nichtnegative Funktion $f(x)+|f(x)|$, die durch $\frac{2K}{x^r}$ beschränkt ist; also existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty |f(x)|\;dx\,,$$

und damit auch das gesuchte Integral als ihre Differenz.

*2.)* geht völlig analog. ■

Als Beispiel hierfür betrachten wir die Strahlung eines schwarzen Körpers: Nach dem RAYLEIGHschen Strahlungsgesetz, wonach alle mit der Geometrie des Körpers verträglichen Wellenzahlvektoren gleichwahrscheinlich sind, wäre die Energiedichte proportional zum Quadrat der Frequenz, die Gesamtenergie also proportional zu

$$\int_0^\infty \nu^2\,d\nu\,,$$

einem offensichtlich divergenten Integral: Das ist die sogenannte „UV-Katastrophe“, die dieses Modell zum Widerspruch führt.

Die Abhilfe besteht bekanntlich darin, daß man die Gleichverteilung der Frequenzen durch eine BOSE-EINSTEIN-Statistik ersetzt und als neue Energiedichte nun nach dem PLANCKschen Strahlungsgesetz

$$\frac{8\pi h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

erhält, wobei $h$ das PLANCKsche Wirkungsquantum, $k$ die BOLTZMANN-Konstante, $c$ die Lichtgeschwindigkeit und $T$ die absolute Temperatur bezeichnet. Hier ist die Gesamtenergie

$$\frac{8\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu\,,$$

und die UV-Katastrophe wird genau dann vermieden, wenn dieses Integral konvergiert.

Mit der Substitution $x = \dfrac{h\nu}{kT}$ erhalten wir

$$\frac{8\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx\,.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich; betrachten wir also eine positive Konstante $a$ und getrennt die Integrale von 0 bis $a$ und von $a$ bis $\infty$.

Letzteres Integral existiert nach dem gerade bewiesenen Satz, wenn wir $K, r$ finden können, so daß

$$\frac{x^3}{e^x-1} \le \frac{K}{x^r} \quad \text{für alle } x \ge a\,.$$



Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{e^x-1} \le \frac{K}{x^{r+3}} \quad \text{oder} \quad e^x \ge 1 + \frac{x^{r+3}}{K}\,,$$

und dies gilt mit geeignetem $a, K$ und (beispielsweise) $r = 2$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom.

Entsprechend gilt für $0 \le x \le 1$ die Ungleichung etwa mit $r = \frac{1}{2}$, da dort $e^x - 1$ stärker wächst als jede $x$-Potenz. Also konvergiert das Integral sowohl an seiner unteren als auch seiner oberen Grenze, und dazwischen ist ohnehin alles unproblematisch, da der Integrand stetig ist.

■

Als (vorerst) letztes Beispiel eines uneigentlichen Integrals sei noch

$$\Gamma(x) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0$$

betrachtet. Dieses Integral ist natürlich immer uneigentlich an der oberen Grenze; für $x < 1$ zusätzlich auch noch an der unteren.

Diese untere Grenze ist völlig harmlos, denn für $0 < x < 1$ ist

$$e^{-t}t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \le \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{mit} \quad 0 < 1-x < 1\,,$$

so daß obiger Satz sofort die Konvergenz zeigt.

Auch die obere Grenze ist unproblematisch, denn die dazu notwendige Abschätzung

$$e^{-t}t^{x-1} \le \frac{K}{t^r} \iff e^t \ge t^{r+x-1}$$

folgt wieder, da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz.

Die somit für alle $x > 0$ definierte Funktion $x \mapsto \Gamma(x)$ heißt EULERsche *Gamma-Funktion.*

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

Die wichtigste Eigenschaft der Γ-Funktion folgt durch partielle Integration:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = e^{-t}\frac{t^x}{x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

oder

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

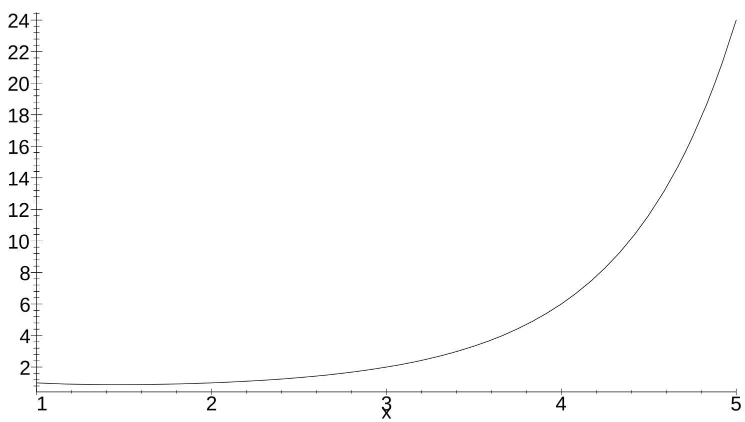


Abb. 58: Die Γ-Funktion



Aus dem elementar berechenbaren Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

ergibt sich somit, daß für alle natürliche Zahlen $n$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$; die Γ-Funktion ist also eine Art stetig gemachter Fakultätsfunktion. GAUSS definierte auf andere Weise eine stetige Funktion $\Pi(x)$, für die $\Pi(n) = n!$ ist, aber wie sich bald herausstellte, ist $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, so daß nur eine der beiden Funktionen wirklich gebraucht wird. Nach einigen Modewechseln im letzten Jahrhundert entscheidet man sich heute meist für $\Gamma(x)$: Diese Funktionswerte sind in Tafelwerken tabelliert, und numerische Verfahren für ihre Berechnung stehen in den einschlägigen Unterprogrammbibliotheken und Computeralgebrasystemen zur Verfügung.

## §5: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$

Im Rest dieses Kapitels wollen wir auch Integrale im $\mathbb{R}^n$ betrachten. In diesem Paragraphen werden die Mengen, über die integriert wird, noch eindimensional sein, d.h. also Kurven, aber immerhin schon in einem Raum beliebiger Dimension liegen. Entsprechende Integrale benötigt man einerseits, um Bogenlängen von Kurven zu berechnen, vor allem aber sind sie wichtig, um die aufzuwendende oder freiwerdende Energie bei der Bewegung eines Objekts in einem Kraftfeld (oder einem elektrisch geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld *usw.*) zu berechnen. Wir beginnen mit der Definition von Kurven:

### a) Kurven und Tangentenvektoren

**Definition:** *a)* Ein *Kurvenstück* $\gamma$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$.
*b)* Eine *Kurve* $\gamma$ ist eine endliche Folge von Kurvenstücken

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$$

von Kurvenstücken mit der Eigenschaft, daß

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1.$$

*c)* Eine Kurve $\gamma$ heißt geschlossen, wenn $\gamma_r(b_r) = \gamma_1(a_1)$ ist.

Die Bedingung im Teil *b)* der obigen Definition stellt sicher, daß Kurven, anschaulich betrachtet, zusammenhängend sind; es hat allein praktische Gründe, daß man nicht auch von den Intervallen verlangt, daß sie unmittelbar aneinander anschließen: Oft werden die Formeln für ein Kurvenstück einfacher, wenn man einen bestimmten Anfangswert wie etwa die Null für das Intervall nehmen kann.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Kurve und einem Kurvenstück liegt in der Differenzierbarkeit: Durch Verschiebung der Parameterintervalle könnte man jede Kurve durch eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ beschreiben, aber dort, wo zwei Kurvenstücke aneinanderstoßen, muß diese Abbildung nicht differenzierbar sein; anschaulich gesprochen kann die Kurve dort einen „Knick“ haben.

Die Ableitung $\dot\gamma(t)$ ist ein Vektor, dessen Komponenten die Ableitungen der Koordinatenfunktionen von $\gamma(t)$ sind; wir bezeichnen ihn als Tangentenvektor der Kurve im Punkt $\gamma(t)$. Gelegentlich wird es wichtig sein, daß dieser Vektor ungleich dem Nullvektor ist; wir definieren daher

**Definition:** *a)* Ein Kurvenstück $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$.
*b)* Eine Kurve $\gamma$ heißt *stückweise regulär,* wenn sie aus regulären Kurvenstücken zusammengesetzt werden kann.

Man beachte, daß für die Intervallendpunkte nichts gefordert wird: Selbst wenn die Ableitung dort existiert, muß sie nicht von Null verschieden kann. Auf diese Weise läßt sich ein Kurvenstück, bei dem $\dot\gamma(t)$ an endlich vielen Stellen gleich dem Nullvektor ist, immer noch als stückweise reguläre Kurve auffassen.

Anschaulich kann man sich ein Kurvenstück durch sein Bild im $\mathbb{R}^n$ vorstellen, allerdings muß man beachten, daß dasselbe Bild durch ganz verschiedene Funktionen parametrisiert werden kann. Als Beispiel für



verschiedene Parametrisierungen einer und derselben Kurve betrachten wir den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Seine bekannteste Darstellung als Kurvenstück ist die Parametrisierung

$$\gamma_1: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)\,,$$

aber natürlich wäre auch

$$\gamma_2: [0, 1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

eine Möglichkeit. Es geht aber auch ganz anders, denn auch bei

$$\gamma_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

liegen sämtliche Bildpunkte auf dem Einheitskreis, und zumindest für jedes endliche Teilintervall von $\mathbb{R}$ definiert auch $\gamma_3$ ein Kurvenstück. Wie eine kurze Kurvendiskussion (oder ein Blick auf Abbildung 59) zeigt, besteht das Bild von $\gamma_3$ aus allen Punkten des Einheitskreises außer $(1, 0)$; letzterer Punkt ist der Grenzwert von $\gamma_3(t)$ für $t \to \pm\infty$.

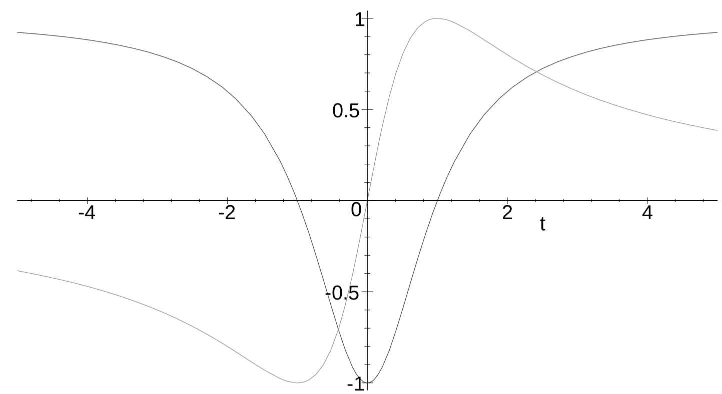


Abb. 59: Graph der Funktionen $x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ und $y(t) = \frac{2t}{t^2+1}$

Jede dieser Parametrisierungen führt zu anderen Tangentenvektoren: Für einen festen Kurvenpunkt liegen zwar alle drei Vektoren auf ein und derselben Geraden, der Tangenten an den Kreis, aber sie haben verschiedene Länge: Für $(x, y) = \gamma_1(t)$ ist

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

für $(x, y) = \gamma_2(t)$ ist

$$\dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi y \\ 2\pi x \end{pmatrix},$$

und für $(x, y) = \gamma_3(t)$ schließlich zeigt eine kurze Rechnung, daß

$$\dot\gamma_3(t) = \frac{2}{(t^2+1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{t^2+1} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

ist. Bei der Parametrisierung mit $\gamma_2$ sind die Tangentenvektoren also jeweils $2\pi$ mal so lang wie bei der mit $\gamma_1$, was man anschaulich so interpretieren kann, daß der Kreis bei dieser Parametrisierung $2\pi$ mal so schnell durchlaufen wird wie bei der mit $\gamma_1$. Bei der Parametrisierung mit $\gamma_3$ ist die Länge der Vektoren variabel, und sie zeigen auch in die Gegenrichtung zu den Tangentenvektoren an $\gamma_1$ und $\gamma_2$; bei dieser Parametrisierung wird der Kreis also im Uhrzeigersinn durchlaufen.

## b) Die Bogenlänge einer Kurve

In der Integralrechnung wird die Fläche unterhalb einer Kurve dadurch definiert, daß man sie durch Rechtecke angenähert; falls deren Gesamtfläche bei immer feiner werdenden Unterteilungen gegen einen festen Grenzwert konvergiert, bezeichnetet man diesen als Fläche unterhalb der Kurve oder auch als RIEMANN-Integral über die die Kurve beschreibende Funktion.

Nichts spricht dagegen, bei der Definition der Bogenlänge genauso vorzugehen: Die primitiven Bausteine, mit denen wir die Kurve annähern, sind nun natürlich keine Rechtecke mehr, sondern Strecken; am einfachsten nehmen wir dazu Tangentenvektoren. Dazu brauchen wir allerdings Differenzierbarkeit, wir müssen uns also zunächst auf ein Kurven*stück* beschränken.



Sei also $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Kurvenstück; wir unterteilen das Intervall, wie wir es vom RIEMANN-Integral her gewohnt sind, durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall $(t_i, t_{i+1})$ einen Zwischenpunkt $\tau_i$. Der Tangentenvektor im Punkt $\tau_i$ ist nach Definition $\dot\gamma(\tau_i)$, allerdings ist das nicht unbedingt der Vektor, den wir wollen: Wir wollen schließlich die Kurve durch ihre Tangente annähern, und dazu müssen wir die Länge an das Intervall anpassen, über dem wir die Kurve approximieren wollen. Indem wir den Vektor $\dot\gamma(\tau_i)$ der Differentialquotienten

$$\frac{1}{t_{i+1}-t_i} \cdot \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \begin{pmatrix} \gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_{i+1}) - \gamma_n(t_i) \end{pmatrix}$$

approximieren sehen wir, daß der Vektor $\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ ungefähr gleich

$$\dot\gamma(\tau_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

ist, die Bogenlänge der Kurve kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\|\dot\gamma(\tau_i)\right\| \cdot (t_{i+1} - t_i)\,.$$

Für die Kreislinie mit ihrer Parametrisierung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist dies in den Abbildungen 60 und 61 dargestellt für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, 2\pi]$ in zwanzig *bzw.* fünfzig Teilintervalle; im letzteren Fall ist in der Tat kaum mehr ein Unterschied zu sehen zwischen der Kreislinie und den fünfzig Vektoren, durch die sie approximiert wird.

Da $\gamma$ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist auch $\left\|\dot\gamma(t)\right\|$ immerhin noch eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist. Somit kommen wir auf ganz natürliche Weise auf die

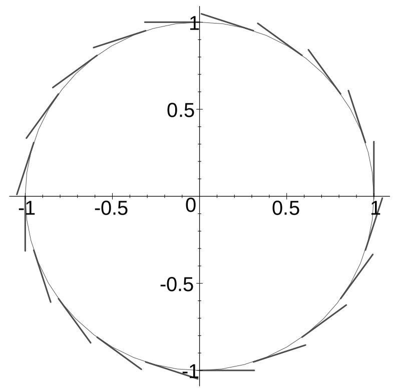


Abb. 60: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch zwanzig Strecken

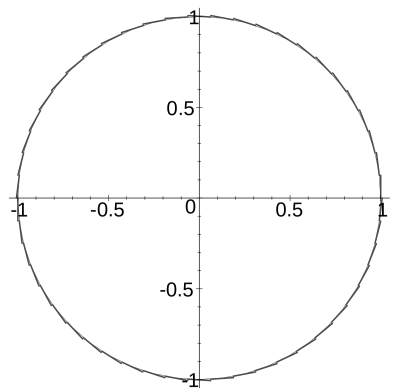


Abb. 61: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch fünfzig Strecken

**Definition:** *a)* Die Bogenlänge eines Kurvenstücks $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt\,.$$

*b)* Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma$, bestehend aus den Kurvenstücken $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ ist die Summe der Bogenlängen der Kurvenstücke $\gamma_i$.



Um zu sehen, ob das alles wirklich vernünftig ist, berechnen wir die Bogenlänge der Kreislinie

$$\gamma_1\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2;\quad t\mapsto(\cos t,\sin t)\,.$$

Hier ist

$$\dot\gamma_1(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad\text{also}\quad \|\dot\gamma_1(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1\,,$$

und damit ist die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi}\|\dot\gamma_1(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\,,$$

wie erwartet; zumindest für diese Parametrisierung ist also alles vernünftig.

Alternativ hatten wir die Kreislinie auch parametrisiert durch

$$\gamma_3\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;\quad t\mapsto\left(\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{2t}{t^2+1}\right);$$

hier ist die Bogenlänge im Sinne obiger Definition nicht erklärt, jedoch können wir natürlich $\gamma_3$ auf endliche Intervalle einschränken und diese immer größer werden lassen; falls ein Grenzwert existiert, bekommen wir also hier die Bogenlänge als uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|\dot\gamma_3(t)\|\,dt\,.$$

Berechnen wir zunächst die Ableitung von $\gamma_3$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)=\frac{(t^2+1)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)=\frac{(t^2+1)\cdot 2-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,,$$

d.h.

$$\left\|\dot\gamma_3(t)\right\| = \frac{\sqrt{(4t)^2 + 4(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2\sqrt{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1}\,.$$

Wie Abbildung 62 zeigt, ist diese Annäherung der Kreislinie durch Strecken erheblich unregelmäßiger als die obige, aber beim Übergang zu immer feiner werdenden Unterteilungen gehen natürlich trotzdem alle Streckenlängen gegen null. (Eingezeichnet sind die Strecken zu einer Unterteilung des Intervalls $[-10, 10]$ in Teilintervalle der Länge $1/2$.)

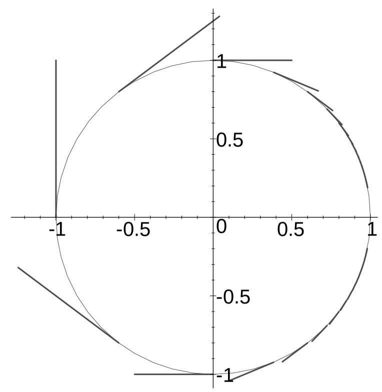


Abb. 62: Approximation durch Strecken in der rationalen Parametrisierung

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\arctan t\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi\,;$$

auch bei dieser Parametrisierung erhalten wir also dasselbe Ergebnis, wie dies aus geometrischen Gründen auch sein muß: Die Bogenlänge ist schließlich eine Eigenschaft einer Kurve, nicht einer speziellen Parametrisierung der Kurve.

Ganz so einfach ist die Sache allerdings nun doch nicht: Schließlich



parametrisiert auch

$$\gamma_4\colon [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Kreislinie, aber nun ist die Bogenlänge

$$\int_0^{20\pi} \left\|\dot\gamma_4(t)\right\| dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi\,.$$

Auch das erscheint geometrisch durchaus sinnvoll: Wenn man nicht nur einmal, sondern zehnmal im Kreise herum geht, legt man schließlich einen zehnmal so langen Weg zurück.

Wir müssen also etwas sorgfältig sein, wenn wir präzisieren wollen, was die Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung wirklich bedeuten soll; da das ganze dadurch auch etwas umfangreicher wird, sei das entsprechende Lemma in den nächsten Abschnitt verschoben, wo wir es gleich etwas allgemeiner beweisen werden.

### c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve

Die Hauptanwendung von Kurvenintegralen besteht nicht darin, die Längen aller möglicher Kurven zu berechnen; der Hauptgrund, warum wir solche Integrale betrachten, ist die Berechnung der aufzuwendenden oder freiwerdenden Energie bei der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld *bzw.* – im Fall eines elektrisch geladenen Teilchens – eines elektromagnetischen Felds.

Gehen wir der Einfachheit halber aus von einem Kraftfeld $\vec F(\boldsymbol{x})$ und einem Teilchen, das sich entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ durch dieses Feld bewegt, d.h. der Vektor $\vec F\big(\gamma(t)\big)$ sei für alle $t$ aus $[a,b]$ definiert. Im Punkt $\gamma(t)$ greift dann also der Kraftvektor $\vec F\big(\gamma(t)\big)$ an; die Arbeit, die das Teilchen verrichten muß oder gewinnt, ist das Skalarprodukt aus Kraftvektor und (Tangential-)Vektor des Wegs.

Um die Gesamtarbeit zunächst näherungsweise auszurechen, unterteilen wir wie gewohnt das Intervall $[a,b]$ durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$