§ 3: Integralrechnung

Die Integralrechnung ist neben der Differentialrechnung die zweite wichtige Säule der Analysis. Wir beschränken uns zunächst auf den eindimensionalen Fall, der sich auch für die mehrdimensionale Theorie zumindest bei der rechnerischen Lösung von Problemen als fundamental erweisen wird.

a) Heuristische Vorüberlegungen

Seiner großen Bedeutung entsprechend, wollen wir uns dem Integralbegriff zunächst heuristisch nähern, bevor wir ihn – mit beträchtlichem technischem Aufwand – im nächsten Paragraphen formal einführen.

Die Integration dient primär drei Zwecken:

- Sie dient zur Umkehrung der Differentiation.
- Sie dient zur Flächenberechnung.
- Sie dient zur Durchschnittsberechnung.

Wie wollen uns alle drei Aspekte kurz ansehen.

1) Integration als Umkehrung der Differentiation: Das klassische Beispiel zur Einführung der Differentiation ist die Geschwindigkeit als Ableitung des Wegs nach der Zeit. Es liegt daher nahe, zur Einführung des Integrals die Frage nach der Berechnung des Wegs aus der Geschwindigkeit zu betrachten.

Wir nehmen also an, ein Fahrzeug sei zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $s = 0$ und beschleunige in fünf Sekunden auf die im Stadtverkehr zulässige Hchstgeschwindigkeit von 13,9 m/sec. Welchen Weg hat es bis dahin zurückgelegt?

Die Geschwindigkeit sei durch folgende Tabelle gegeben:

t [sec]	0	1	2	3	4	5
v [m/sec]	2,5	6,1	9,1	11,5	13,4	13,9

Ist $s(t)$ der bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg und $v(t)$ die dann erreichte Geschwindigkeit, so ist bekanntlich

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+1\,sec) - s(t)}{(t+1\,sec) - t} = \frac{s(t+1\,sec) - s(t)}{1\,sec}\,.$$

Also ist

$$s(t+1\,sec) \approx s(t) + v(t)\cdot 1\,sec\,.$$

Da wir sowohl $s(0\,sec) = 0\,m$ als auch die Werte $v(t)$ für $t = 0, 1, 2, 3$ und $4\,sec$ kennen, können wir $s(5\,sec)$ rekursiv berechnen als

$$\begin{aligned} s(5\,sec) &\approx v(0\,sec)\cdot 1\,sec + v(1\,sec)\cdot 1\,sec + v(2\,sec)\cdot 1\,sec \\ &\quad + v(3\,sec)\cdot 1\,sec + v(4\,sec)\cdot 1\,sec \\ &= 2{,}5\,m + 6{,}1\,m + 9{,}1\,m + 11{,}5\,m + 13{,}4\,m = 42{,}6\,m\,. \end{aligned}$$

Also hat das Fahrzeug in fünf Sekunden 42,6 m zurückgelegt?

Zumindest mit dieser Genauigkeit ist das sicherlich falsch, denn bei der Berechnung des Wegs sind wir davon ausgegangen, daß das Fahrzeug während der ersten Sekunde konstant mit einer Geschwindigkeit von 2,5 m/sec gefahren ist, exakt ab deren Ende dann aber plötzlich eine Sekunde lang mit 6,1 m/sec, *usw.* Das ist natürlich unrealistisch; tatsächlich dürfte die Geschwindigkeit etwa so verlaufen sein, wie es die Kurve in Abbildung 37 angibt, wohingegen wir mit dem ebenfalls eingezeichneten stufenförmigen Verlauf gerechnet haben. Wir haben die Geschwindigkeit somit fast durchgängig unterschätzt und damit auch einen zu kleinen Weg berechnet.

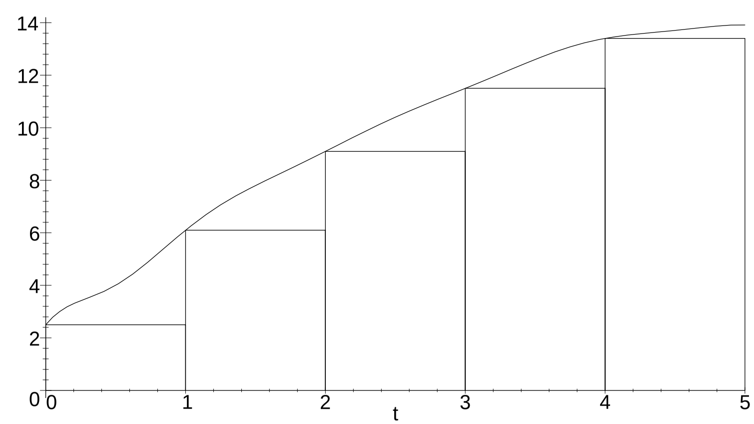


Abb. 37: Tatsächliche und unterschätzte Geschwindigkeit

Alternativ hätten wir auch einen *zu großen* Weg schätzen können, wenn wir die Geschwindigkeit während eines Sekundenintervalls jeweils auf den bekannten Wert am *Ende* dieses Intervalls gesetzt hätten; das Ergebnis wäre dann gewesen

$$\begin{aligned} s(5\,sec) &\approx v(1\,sec)\cdot 1\,sec + v(2\,sec)\cdot 1\,sec + v(3\,sec)\cdot 1\,sec \\ &\quad + v(4\,sec)\cdot 1\,sec + v(5\,sec)\cdot 1\,sec \\ &= 6{,}1\,m + 9{,}1\,m + 11{,}5\,m + 13{,}4\,m + 13{,}9\,m = 54{,}0\,m\,. \end{aligned}$$

Tatsächlich wissen wir im Augenblick also nur, daß der zurückgelegte Weg irgendwo zwischen 42,6 m und 54 m liegt.

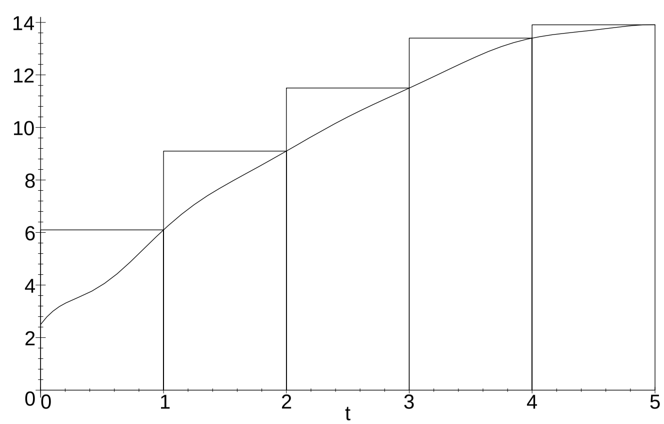


Abb. 38: Tatsächliche und überschätzte Geschwindigkeit

Eine bessere Schätzung bekommen wir, wenn wir anstelle der Sekundenintervalle Intervalle von nur einer halben Sekunde betrachtet – vorausgesetzt natürlich, wir kennen die Geschwindigkeit auch für halbzahlige Sekundenwerte. Die entsprechenden Werte seien die in der folgenden Tabelle angegebenen:

t [sec]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
v [m/sec]	2,5	4,4	6,1	7,8	9,1	10,4	11,5	12,6	13,4	13,8	13,9

Jetzt ist die „unterschätzte“ Wegstrecke

$$\sum_{i=0}^{9} v\left(\frac{i}{2}\,sec\right)\cdot\frac{1}{2}\,sec = 45{,}6\,m\,,$$

und die „überschätzte“ ist

$$\sum_{i=1}^{10} v\left(\frac{i}{2}\,sec\right)\cdot\frac{1}{2}\,sec = 51{,}3\,m\,,$$

die Unsicherheit hat sich also etwa halbiert. Abbildung 39 zeigt den Verlauf von unterschätzter, tatsächlicher und überschätzter Geschwindigkeit für die Halbsekundenintervalle.

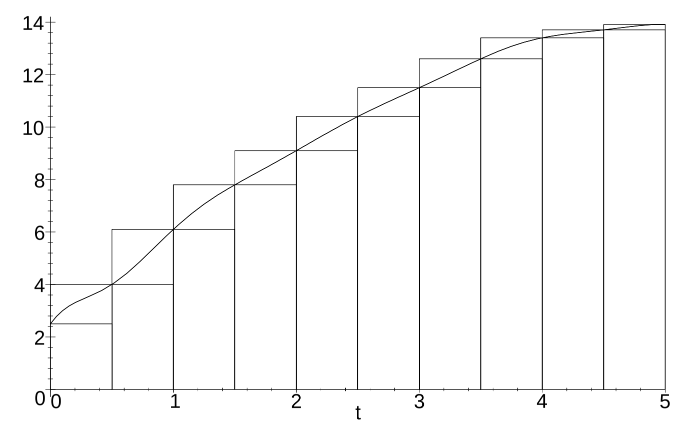


Abb. 39: Abtastung in Intervallen von einer halben Sekunde

Beide Werte wie auch ihre Differenz lassen sich anhand von Abbildung 39 leicht geometrisch veranschaulichen: Die unterschätzte Geschwindigkeit ist die Fläche der Rechtecke unterhalb der unteren Treppenfunktion, die überschätzte entsprechend die Fläche der Rechtecke unterhalb der oberen Treppenfunktion, wobei die Basis der Rechtecke jeweils auf der Zeitachse liegt. Die Differenz ist somit gleich der Fläche der Differenzrechtecke.

Diese können wir durch weitere Verfeinerung der Abtastung verkleinern. Dazu nehmen wir an, die eingezeichnete Kurve (die tatsächlich einfach eine notdürftig angepaßte Polynomfunktion darstellt) gebe den tatsächlichen Geschwindigkeitsverlauf wieder, und lassen den Computer rechnen:

Wenn wir die Geschwindigkeit viermal pro Sekunde bestimmen und den zurückgelegten Weg damit schätzen, erhalten wir als untere Schranke

$$\sum_{i=0}^{19} v\left(\frac{i}{4}\,sec\right)\cdot\frac{1}{4}\,sec \approx 47{,}14\,m$$

und als obere Schranke

$$\sum_{i=1}^{20} v\left(\frac{i}{4}\,sec\right)\cdot\frac{1}{4}\,sec \approx 49{,}99\,m\,.$$

Mit zehn Geschwindigkeitswerten pro Sekunde verbessert sich die untere Schranke auf

$$\sum_{i=0}^{49} v\left(\frac{i}{10}\,sec\right)\cdot\frac{1}{10}\,sec \approx 48{,}02\,m$$

und die obere auf

$$\sum_{i=1}^{50} v\left(\frac{i}{10}\,sec\right)\cdot\frac{1}{10}\,sec \approx 49{,}16\,m\,.$$

Wie Abbildung 40 zeigt, unterscheiden sich nun die Rechtecke der unteren Abschätzung nur noch wenig von denen der oberen, und die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve liegt schon recht nahe bei der Fläche der Rechtecke aus jeder der beiden Abschätzungen.

Gehen wir von den Zehntelsekunden zu den Hundertsteln, sind die Rechtecke zumindest visuell in Abbildung 41 nicht mehr voneinander und von der Fläche unter der Kurve zu unterscheiden: Daß man hier keine durchweg schwarze Fläche sieht, liegt ausschließlich an sogenannten *alias*-Effekten, d.h. Diskretisierungsfehlern der Rastergraphik.

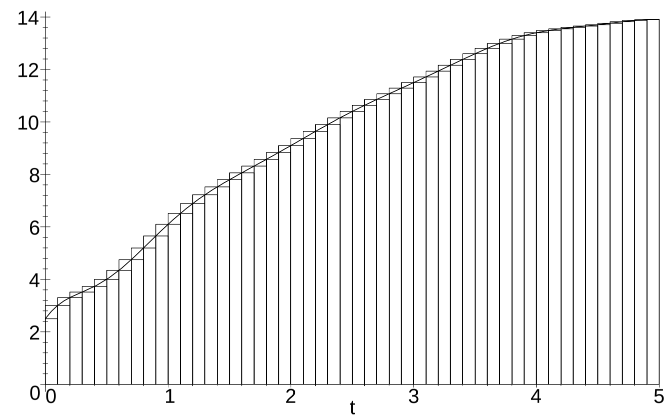


Abb. 40: Abtastung in Intervallen von einer Zehntelsekunde

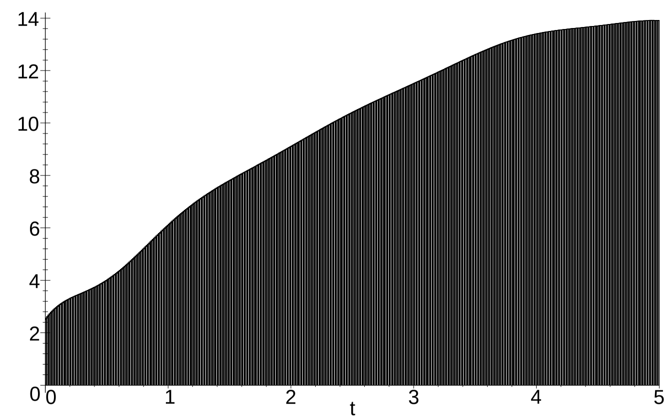


Abb. 41: Abtastung in Intervallen von einer Hundertstelsekunde

Rechnerisch gibt es noch einen kleinen Unterschied im Dezimeterbereich:

$$\sum_{i=0}^{499} v\left(\frac{i}{100}\,sec\right)\cdot\frac{1}{100}\,sec \approx 48{,}54\,m$$

und

$$\sum_{i=1}^{500} v\left(\frac{i}{100}\,sec\right)\cdot\frac{1}{100}\,sec \approx 48{,}66\,m\,.$$

Bei einer nochmaligen Verzehnfachung der Intervallanzahl ist natürlich graphisch nichts neues mehr zu sehen; die Schätzwerte verbessern sich auf

$$\sum_{i=0}^{4999} v\left(\frac{i}{1000}\,sec\right)\cdot\frac{1}{1000}\,sec \approx 48{,}595\,m$$

für die untere Schranke und

$$\sum_{i=1}^{5000} v\left(\frac{i}{1000}\,sec\right)\cdot\frac{1}{1000}\,sec \approx 48{,}607\,m$$

für die obere.

Um die eingangs gestellte Frage nach dem zurückgelegten Weg millimetergenau beantworten zu können (sofern man diese Genauigkeit wirklich als sinnvoll betrachtet), muß die Geschwindigkeitskurve 10 000 Mal pro Sekunde abgetastet werden, und wir erhalten die Schranken

$$\sum_{i=0}^{49999} v\left(\frac{i}{10000}\,sec\right)\cdot\frac{1}{10000}\,sec \approx 48{,}6006\,m$$

und

$$\sum_{i=1}^{50000} v\left(\frac{i}{10000}\right)\,sec\cdot\frac{1}{10000}\,sec \approx 48{,}6017\,m\,;$$

das Fahrzeug legte in fünf Sekunden also 48 m und 60,1 cm zurück.

2) Integration als Flächenbestimmung: Die Abbildungen 4 und vor allem 5 zeigen, daß die immer feiner werdenden Rechtecke, die wir für die obigen Abschätzungen wählten, die Fläche unter der Kurve $v = v(t)$ immer besser annähern. Wenn wir die Einheiten vergessen und t wie auch v als Längen ansehen, können wir die oben betrachteten Ausdrücke

$$\sum_{i=0}^{5n-1} v\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \quad\text{und}\quad \sum_{i=1}^{5n} v\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

also auch als Näherungswerte für die Fläche unter der Kurve ansehen und den Flächeninhalt als ihren gemeinsamen Grenzwert für immer größer werdendes n berechnen.

Genau genommen handelt es sich hier allerdings nicht um die *Berechnung* dieser Fläche, sondern um die *Definition* des Flächeninhalts, denn es gibt schließlich *a priori* keinen Begriff des Flächeninhalts einer krummlinig begrenzten Fläche. Die hier gewählte Definition über eine Ausschöpfung mit immer feiner werdenden Rechtecken ist zwar sehr natürlich, aber nicht zwangsläufig. Sie ist übrigens weit älter als jeder Begriff eines Integrals oder auch nur Grenzwerts: Bereits vor über zwei Jahrtausenden, um etwa 370 vor Christus, definierte der griechische Mathematiker EUDOXOS VON CNIDOS (*ca.* 408–*ca.* 355), ein Schüler und späterer Konkurrent PLATOS, Flächeninhalte auf diese Weise; später hat ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287–212) diese Methode perfektioniert und angewandt auf Kreise und Parabeln; insbesondere berechnete er damit seine Abschätzung $223/71 < \pi < 22/7$ für π, in Dezimalzahlen ausgedrückt $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$, wobei diese Abschätzung allerdings nicht auf Rechtecken beruht, sondern auf der Konstruktion des regelmäßigen 96-Ecks.

3) Integration als Durchschnittsbestimmung: Kehren wir wieder zurück zum Eingangsbeispiel eines sich beschleunigenden Fahrzeugs, und fragen wir uns, wie hoch die *Durchschnittsgeschwindigkeit* war. Bei endlich vielen Werten ist der Durchschnitt natürlich einfach das arithmetische Mittel, also z.B.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{5}\cdot\big(v(0\,sec)+v(1\,sec)+v(2\,sec)+v(3\,sec)+v(4\,sec)\big)\\ =\;&\frac{1}{5}\cdot 42{,}6\,m/sec = 8{,}52\,m/sec\,,\end{aligned}$$

wenn wir die Geschwindigkeiten vom *Anfang* jedes Sekundenintervalls nehmen, und

$$\begin{aligned}&\frac{1}{5}\cdot\big(v(1\,sec)+v(2\,sec)+v(3\,sec)+v(4\,sec)+v(5\,sec)\big)\\ =\;&\frac{1}{5}\cdot 54{,}0\,m/sec = 10{,}8\,m/sec\,,\end{aligned}$$

wenn wir die vom Ende nehmen.

Natürlich läßt sich auch hier die Abtastung immer weiter verfeinern; die entstehenden Ausdrücke

$$\frac{1}{5n}\cdot\sum_{i=0}^{5n-1} v\left(\frac{i}{n}\,sec\right) \quad\text{und}\quad \frac{1}{5n}\cdot\sum_{i=1}^{5n} v\left(\frac{i}{n}\,sec\right)$$

entsprechen bis auf einen Faktor von $\frac{1}{5\,sec}$ genau denen aus Teil *a)*, wo wir den Weg abgeschätzt haben – wie es ja auch in der Tat der Fall sein muß: Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist schließlich nichts anderes als der zurückgelegte Weg dividiert durch die zugrundeliegende Zeitspanne von fünf Sekunden.

Trotzdem ist die Interpretation eines Integrals als Durchschnitt gelegentlich von unabhängigem Interesse, da vor allem bei Anwendungen in der Quantenphysik oft zwar Durchschnitte existieren, aber keine „Zähler“ und „Nenner“, als deren Quotienten man sie interpretieren könnte.

b) Integration elementarer Funktionen

Abstrahieren wir vom Beispiel der Wegberechnung anhand einer Geschwindigkeitskurve und betrachten wir das allgemeine Problem, zu einer gegebenen reellwertigen Funktion f eine neue Funktion F zu finden derart, daß $F'(x) = f(x)$ ist.

Da jede konstante Funktion die Ableitung Null hat, ist mit F für jede reelle Zahl c auch $F + c$ eine solche Funktion; um ein konkretes F hinzuschreiben, müssen wir also einen Funktionswert von F festlegen; der Einfachheit halber sei dies, in Analogie zum obigen Beispiel, der Wert $F(0) = 0$.

Damit übernimmt f die Rolle der Geschwindigkeit v, dem Weg entspricht die Funktion F, die Variable ist nun x anstelle der Zeit t, und da uns F an einer beliebigen Stelle x interessiert, nicht nur wie im obigen Beispiel an der Stelle 5, empfiehlt es sich, n jetzt als Gesamtzahl der Intervalle zu nehmen, nicht wie oben als Anzahl der Intervalle pro

Einheit (Sekunde). Die Länge eines jeden Intervalls wird dann zu x/n, und die Analoga zu obigen Summen sind die Ausdrücke

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n} \quad\text{und}\quad \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}\,,$$

deren gemeinsamer Grenzwert für immer größer werdendes n der gesuchte Wert $F(x)$ sein sollte.

Wir *definieren* daher

$$F(x) \underset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n} \qquad (*)$$

in der Hoffnung, daß dieser Grenzwert existiert und mit dem anderen übereinstimmt – zumindest in hinreichend vielen interessanten Fällen. Bevor wir uns im nächsten Paragraphen dieser Frage zuwenden, wollen wir hier zunächst etwas mit dieser vorläufigen Definition spielen und sehen, was sie bei einfachen Funktionen liefert.

1) Die Funktion $f(x) = x^2$***:*** Hier erhalten wir

$$F(x) \underset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{ix}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n}$$
$$= x^3 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2\,.$$

Wie man in seiner Formelsammlung nachschlägt oder sich von seinem Computeralgebrasystem sagen läßt, ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}\,,$$

eine Formel, die dann nachträglich leicht durch vollständige Induktion bewiesen werden kann:

Für $n = 1$ steht links und rechts Null, die Formel ist also korrekt.

Angenommen, wir hätten sie bewiesen für $n-1$ anstelle von n, d.h. wir wüßten, daß für ein spezielles $n > 1$

$$\sum_{i=0}^{n-2} i^2 = \frac{(n-1)(2n-3)(n-2)}{6}$$

ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 &= \frac{(n-1)(2n-3)(n-2)}{6} + (n-1)^2 \\ &= \frac{n-1}{6}\cdot\big((2n-3)(n-2)+6(n-1)\big) \\ &= \frac{n-1}{6}\cdot(2n^2-7n+6+6n-6) \\ &= \frac{n-1}{6}\cdot(2n^2-n) = \frac{(n-1)(2n-1)n}{6} \\ &= \frac{n(2n-1)(n-1)}{6},\end{aligned}$$

d.h. die Formel für n selbst.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist diese damit für *alle* Werte von n bewiesen; wir können sie in obige Rechnung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}F(x) &= x^3 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(2n-1)(n-1)}{6} = x^3\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)(n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{x^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{x^3}{6}\cdot 2 = \frac{x^3}{3}.\end{aligned}$$

Diese Funktion hat tatsächlich die Ableitung $F'(x) = x^2$, zumindest in diesem Beispiel funktioniert also die Definition $(*)$.

2) Die Exponentialfunktion: Versuchen wir dasselbe nochmal für die Funktion $f(x) = e^x$. Hier führt $(*)$ (wieder mit der Festlegung $F(0) = 0$)

auf den Ansatz

$$\begin{aligned}F(x) \underset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{ix}{n}}\cdot\frac{x}{n} \\ &= x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^i.\end{aligned}$$

Die Summe ganz rechts ist eine geometrische Reihe und kann leicht ausgerechnet werden: Setzen wir zur Abkürzung $q = e^{x/n}$, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} q^i &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} \\ q\sum_{i=0}^{n-1} q^i &= \phantom{1+{}} q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ \hline \Rightarrow (1-q)\sum_{i=0}^{n-1} q^i &= 1 - q^n.\end{aligned}$$

Für $q \neq 1$ können wir durch $1-q$ dividieren und erhalten die Formel

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Da uns nur der Fall $x \neq 0$ interessiert, ist $q = e^{\frac{x}{n}} \neq 1$; wir können die Formel also anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}F(x) = x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} &= x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} \\ &= x(1-e^x)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}.\end{aligned}$$

Im Grenzwert ganz rechts gehen für $n \to \infty$ leider sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen Null, wir müssen also die Regel von DE L'HOSPITAL anwenden. Diese gilt zwar nur für Grenzwerte von Werten stetiger Funktionen, während wir hier den Grenzwert einer diskreten

Folge suchen, aber wenn für eine reelle Variable u der Grenzwert

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{u}}{1-e^{\frac{x}{u}}}$$

existiert, konvergiert natürlich auch die Folge der Zahlen

$$\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

gegen eben diesen Grenzwert.

Nach DE L'HOSPITAL ist

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{u}}{1-e^{\frac{x}{u}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{d}{du}\frac{1}{u}}{\frac{d}{du}(1-e^{\frac{x}{u}})} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{-1}{u^2}}{-e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{-x}{u^2}\right)}$$
$$= \lim_{u\to\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x}{u}}} = \frac{-1}{x}\,.$$

Eingesetzt in den Ansatz für $F(x)$ führt dies auf

$$F(x) = x(1-e^x)\cdot\frac{-1}{x} = e^x - 1\,,$$

eine Funktion, deren Ableitung in der Tat e^x ist.

3) Die Dirichletsche Sprungfunktion: Bevor wir zu übermütig werden, möchte ich als letztes Beispiel noch eine Funktion betrachten, die sich im Gegensatz zu Quadrat und Exponentialfunktion alles andere als gut verhält, die DIRICHLETsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Mit $F(0) \underset{\text{def}}{=} 0$ ist wieder

$$F(x) \underset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ix}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}\,.$$

Dabei ist die Zahl ix/n für $i = 0$ rational, da Null; für $i \neq 0$ ist sie genau dann rational, wenn auch x rational ist. In diesem Fall ist also

$f(ix/n) = 1$ für alle i, d.h.

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{x}{n} = x$$

für rationales x. Für irrationales x dagegen sind alle ix/n außer der Null irrational, also ist $f(ix/n) = 0$ für alle $i \neq 0$. Damit bleibt von der Summe nur der erste Summand stehen, d.h.

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0\,.$$

Also ist

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

eine offensichtlich nicht differenzierbare Funktion, und wenn $F'(x)$ nicht einmal existiert, kann es natürlich auch nicht gleich $f(x)$ sein.

Auch unter dem Gesichtspunkt der Interpretation von $F(x)$ als Fläche unterhalb der Kurve $y = f(x)$ ist das Ergebnis unbefriedigend, denn da $f(x) \geq 0$ für alle x, sollte $F(x)$ eine monoton wachsende (oder zumindest nicht fallende) Funktion von x sein, wohingegen das gerade berechnete F bei jeder rationalen Zahl auf Null zurückfällt.

Der Ansatz $(*)$ hat also auch seine Tücken, und es wird Zeit, diese heuristische Definition durch eine bessere zu ersetzen.

c) Definition des Riemann-Integrals

Tatsächlich ist der Ansatz $(*)$ nicht so schlecht: Für die beiden gutartigen Funktionen und für das Eingangsbeispiel der Streckenbestimmung führte er schließlich zu vernünftigen Ergebnissen, und wie wir bald sehen werden, kann man Integrale über stetige Funktionen *immer* nach diesem Ansatz bestimmen; zumindest als Veranschaulichung des Integralbegriffs sollte man ihn daher durchaus im Hinterkopf behalten. Problematisch wird er erst bei „schlechten" Funktionen wie der im letzten Beispiel.

1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz?: Dies legt natürlich die Frage nahe, ob man solche „schlechten“ Funktionen für Anwendungen wirklich braucht, und wenn ja, ob man sie so sehr braucht, daß sich der erhebliche technische Aufwand, den wir in diesem Paragraphen treiben müssen, lohnt.

Die DIRICHLETsche Sprungfunktion ist ein rein theoretisch konstruiertes Gegenbeispiel, das wohl keinerlei praktische Anwendung haben dürfte. Eine ihrer charakteristischen Eigenschaften taucht allerdings auch bei praktisch relevanten Funktionen auf: Auch ein periodisch wiederholter Rechteckimpuls hat abzählbar unendlich viele Sprungstellen, und zumindest als Idealisierung eines realen Signals spielt diese Funktion eine Rolle – sie ist allerdings erheblich harmloser als DIRICHLETS Beispiel, da die Menge ihrer Sprungstellen diskret ist.

Wirklich kompliziert wird die Situation dagegen beispielsweise bei der mathematischen Modellierung des Rauschens in einer elektronischen Schaltung: Hier liegt eine noch einmal deutlich schwierigere Situation vor als im obigen Beispiel, und in der Tat wird auch der in diesem Paragraphen definierte Integralbegriff nicht ausreichen, um mit diesem Problem fertig zu werden. Er ist aber eine unabdingbare Voraussetzung, um die dazu bentigten Techniken zu verstehen.

Obwohl wir im folgenden fast jeden der wichtigeren Sätze aus der Analysis I noch einmal in die Erinnerung zurückrufen und anwenden müssen, ist die nun folgende Konstruktion also kein Luxus, sondern zumindest langfristig notwendig auch für praktische Anwendungen.

2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden?: Ein Punkt, bei dem der bisherige Ansatz nur aufgrund der Einfachheit der betrachteten Beispiele so erfolgreich war, ist die *Abschätzung* des Grenzwerts durch die endlichen Approximationen. Beim Beispiel der Geschwindigkeit eines beschleunigenden Fahrzeugs war das problemlos, denn die Geschwindigkeit war eine monoton wachsende Funktion, die für jedes Teilintervall am linken Ende ihr Minimum und am rechten ihr Maximum annimmt.

Auch $f(x) = x^2$ ist für $x \geq 0$ monoton wachsend, $f(x) = e^x$ sogar für

alle $x \in \mathbb{R}$, so daß wir auch hier leicht untere und obere Schranken für $F(x)$ berechnen können.

Für nichtmonotone Funktionen dagegen ist die Situation völlig anders: Betrachten wir als Beispiel etwa die Sinuslinie zwischen Null und π mit einer Annäherung der Fläche durch sechs Rechtecke. In den Abbildungen 42 und 43 sind diese Rechtecke eingezeichnet, einmal bezogen auf den Funktionswert am linken Ende des Teilintervalls und einmal bezogen auf den am rechten. Wie man sieht, liegen die Rechtecke exakt spiegelsymmetrisch zueinander und haben damit insbesondere die gleiche Summe der Flächeninhalte, nämlich jeweils ungefähr 1,954. Die Fläche unter der Sinuslinie zwischen Null und π ist allerdings, wie wir bald sehen werden,

$$-\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2\,.$$

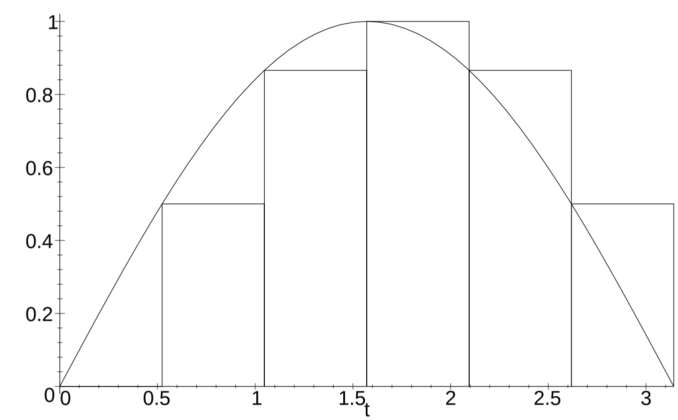


Abb. 42: Sinuslinie mit sechs Rechtecken zum jeweils linken Funktionswert

Wenn man ein (jedem Wissenschaftler zu empfehlendes) gesundes Mißtrauen gegen Computer und Taschenrechner mitbringt, könnte man versucht sein, den Wert 1,954 als eine „Taschenrechnerzwei“ zu interpretieren; da aber die Sinuswerte an den Stellen 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ und 1 wohlbekannt sind (im Winkelmaß ausgedrückt sind diese Stellen gerade

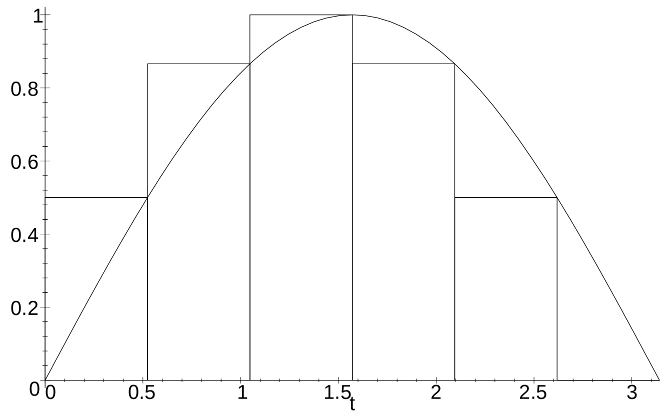


Abb. 43: Sinuslinie mit sechs Rechtecken zum jeweils rechten Funktionswert

die Vielfachen von 30°), kann man die Summe der Rechteckflächen exakt berechnen mit dem Ergebnis

$$\frac{\pi}{6}(2+\sqrt{3})\,,$$

das schon wegen der Transzendenz von π nicht gleich zwei sein kann. Somit haben wir definitiv keine obere Schranke für den korrekten Wert, und zumindest *a priori* haben wir auch keine untere, denn daß die Summe der Rechteckflächen kleiner ist als die Fläche unter der Kurve folgte je erst nachträglich durch Vergleich der beiden Werte.

Um wirklich eine untere Schranke für die Fläche zu bekommen, müßte man hier im Beispiel für die ersten drei Rechtecke den Funktionswert am linken Ende des Teilintervalls nehmen und für die letzten drei den vom rechten; für eine obere Schranke müßte man genau umgekehrt vorgehen.

Für eine beliebige Funktion gibt es aber offensichtlich keinen Grund, warum das Minimum oder Maximum überhaupt an einem Intervallende angenommen werden sollte; für einen möglichst allgemeinen Integrallbegriff sollte man also auch Punkte im Intervallinnern zur Ermittlung der Höhe des Rechtecks heranziehen: Anstelle der bislang betrachteten Unterteilung

$$a < a+\delta < a+2\delta < \cdots < a+(n-1)\delta < a+n\delta = b \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{b-a}{n}$$

sollte also eine beliebige Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

treten.

3) Anwendung des Mittelwertsatzes: Einen weiteren Grund dafür liefert der wohl wichtigste Satz aus der Analysis I, der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung:* Ist F stetig in einem Intervall $[u,v]$ und differenzierbar in (u,v), so gibt es einen Punkt $\xi \in (u,v)$, so daß

$$F'(\xi) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

ist.

Wir suchen zu einer gegebenen Funktion f eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Falls wir annehmen, daß wir diese Funktion schon *hätten*, so wäre $F' = f$, und nach dem Mittelwertsatz gäbe es in jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) ein Element ξ_i, so daß

$$\frac{F(x_{i+1})-F(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = F'(\xi_i) = f(\xi_i)$$

wäre, d.h.

$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\,.$$

Rekursiv folgt, daß

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_n) &= F(x_{n-1}) + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &= F(x_{n-2}) + f(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2}) + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &= \qquad \vdots \\ &= F(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\,. \end{aligned}$$

Damit ist also die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ *exakt* gleich der Gesamtfläche endlich vieler geeignet gewählter Rechtecke; Abbildung 44 veranschaulicht dies anhand der ganz zu Beginn betrachteten Geschwindigkeitsfunktion. Hier ist nicht nur die Fläche unter der Kurve

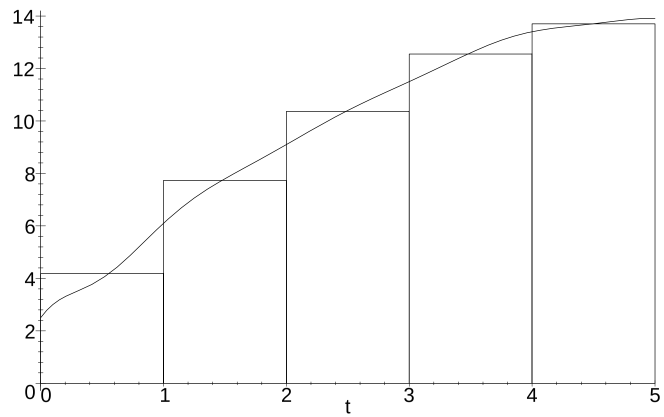


Abb. 44: Die Fläche unter der Kurve ist gleich der Fläche der fünf Rechtecke

exakt gleich der Fläche der fünf Rechtecke, sondern auch die Fläche eines jeden Rechtecks gleich der Fläche zwischen Kurve und Grundlinie des Rechtecks, wir kommen also mit endlich vielen Rechtecken aus und brauchen nicht einmal einen Grenzwert zu berechnen.

Der Haken bei der Sache ist natürlich, daß wir die „geeignet gewählten" Rechtecke nicht kennen: Im obigen Ausdruck ist alles bekannt *außer* den Werten ξ_i, an denen die Funktion f ausgewertet wird.

Die Idee zur Definition des RIEMANN-Integrals ist nun, daß man einfach *beliebige* ξ_i zwischen x_i und x_{i+1} wählt in der Hoffnung, daß bei immer kleiner werdendem Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden x_i der Grenzwert nicht mehr von der Wahl der ξ_i abhängt.

Diese Hoffnung hat natürlich nur eine Chance auf Erfüllung, wenn die Funktion f hinreichend stetig ist; ansonsten können sich die Werte von f an zwei beliebig nahe beieinanderliegenden Stellen immer noch beliebig stark unterscheiden, indem sie beispielsweise wie oben davon abhängen, ob ξ_i rational ist oder nicht.

4) Gleichmäßige Stetigkeit: Die Stetigkeit allein reicht allerdings immer noch nicht ganz aus:

Erinnern wir uns: f heißt *stetig* auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in (a,b)$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt: Ist $y \in D$ und $|y - x| < \delta$, so folgt, daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist.

Wir möchten mehr: Wir wollen, daß sich in *jedem* Rechteck der Wert von $f(\xi)$ höchstens um $\varepsilon > 0$ ändert, falls nur die Breite des Rechtecks unter einer gewissen Schranke liegt, d.h. wir möchten, daß δ nicht von x abhängt

Dies führt auf folgende Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs:

Definition: $D \subseteq \mathbb{R}$ sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Um zu sehen, daß dies mehr ist als die bloße Stetigkeit, betrachten wir die Funktion $f(x) = 1/x$. Diese Funktion ist stetig auf der Menge aller positiver reeller Zahlen, denn für $0 < \delta < x$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$\left|\frac{1}{x \pm \delta} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{\mp\delta}{x(x \pm \delta)}\right| = \frac{\delta}{x(x \pm \delta)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta < (x^2 \pm x\delta)\varepsilon \Leftrightarrow \delta \mp x\delta\varepsilon < x^2\varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{x^2\varepsilon}{1 \mp x\varepsilon}\,.$$

Der Ausdruck ganz rechts ist offensichtlich kleiner, wenn im Nenner das Pluszeichen steht, also gilt: Für gegebenes $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt für jede positive reelle Zahl y

$$|y - x| < \delta \underset{\text{def}}{=} \frac{x^2\varepsilon}{1 + x\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon\,.$$

Damit ist die Stetigkeit der Funktion bewiesen. Sie ist aber nicht gleichmäßig stetig, denn es gibt aber kein von x unabhängiges $\delta > 0$ mit dieser Eigenschaft: Der angegebene Ausdruck für das größtmögliche δ geht wegen des Faktors x^2 im Zähler für $x \to 0$ selbst gegen Null, fällt also unter jede vorgegebene positive Schranke. Abbildung 45 zeigt δ in Abhängigkeit von x für den speziellen Wert $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

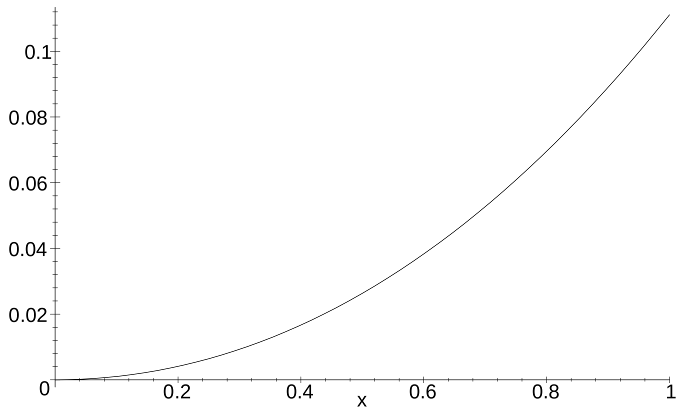


Abb. 45: δ in Abhängigkeit von x für $f(x) = 1/x$ und $\varepsilon = 0{,}1$

In einem abgeschlossenen Intervall sollte so etwas nicht möglich sein, und in der Tat gilt der (durchaus nichttriviale)

Satz: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.

Der *Beweis* ist technisch und indirekt:

Angenommen, f wäre *nicht* gleichmäßig stetig. Dann gäbe es für mindestens ein $\varepsilon > 0$ zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x,y \in [a,b]$, so daß $|y-x| < \delta$, aber $|f(y)-f(x)| \ge \varepsilon$ wäre.

Aufgrund der Annahme, der Satz sei falsch, können wir ein solches ε fixieren und betrachten die speziellen Werte $\delta = \frac{1}{n}$: Nach dem gerade gesagten gibt es dazu Punkte $x_n, y_n \in [a,b]$, so daß $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(y_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon$ ist.

Nun kommt der nichttriviale Teil: Wir benötigen aus der Analysis I den

Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede Folge (x_n) von Punkten aus dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ hat (mindestens) eine konvergente Teilfolge x_{n_ν}.

Insbesondere muß also die hier betrachtete Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge $\left(x_{n_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ haben; deren Grenzwert sei $c \in [a,b]$.

Da $\left|x_{n_\nu} - y_{n_\nu}\right| < 1/n_\nu$ ist, muß dann auch die Folge der y_{n_ν} gegen c konvergieren, und da f nach Voraussetzung eine stetige Funktion ist, gilt

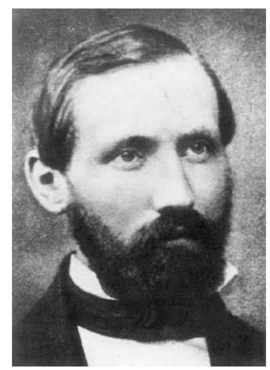
$$\lim_{\nu\to\infty} f(x_{n_\nu}) = \lim_{\nu\to\infty} f(y_{n_\nu}) = f(c)\,.$$

Andererseits ist aber für jedes ν nach Konstruktion der Folgen (x_n) und (y_n) der Abstand zwischen $f(x_{n_\nu})$ und $f(y_{n_\nu})$ größer oder gleich der festgewählten Zahl ε, so daß die beiden Folgen unmöglich denselben Grenzwert haben können.

Mithin führt die Annahme, f sei *nicht* gleichmäßig stetig, auf einen Widerspruch, und damit ist der Satz bewiesen.

■

5) Definition einer Approximation für das Integral: Nach diesen Vorarbeiten können wir ernsthaft darangehen, das Integral einer Funktion zu definieren. Es gibt in der Mathematik verschiedene Integralbegriffe; für uns reicht die Definition des deutschen Mathematikers BERNHARD RIEMANNN, das inzwischen nach ihm benannte RIEMANN-Integral.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANNN (1826-1866) war Sohn eines lutherischen Pastors und schrieb sich 1946 auf Anraten seines Vaters an der Universität Göttingen für das Studium der Theologie ein. Schon bald wechselte an die Philosophische Fakultät, um dort unter anderem bei GAUSS Mathematikvorlesungen zu hören. Nach Promotion 1851 und Habilitation 1854 erhielt er dort 1857 einen Lehrstuhl. Trotz seines frühen Todes initiierte er grundlegende auch noch heute fundamentale Entwicklungen in der Geometrie, der Zahlentheorie und über abelsche Funktionen. Seine Vermutung über die Nullstellen der (heute als RIEMANNsch bezeichneten) ζ-Funktion ist die berühmteste offene Vermutung der heutigen Mathematik.

Wir gehen aus von einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$; gesucht ist eine Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, für die (idealerweise) $F'(x) = f(x)$ sein sollte für alle x aus dem offenen Intervall (a,b).

Wir wählen eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

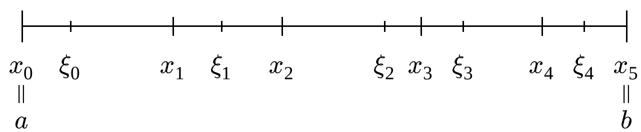
des Intervalls von a bis x. Da wir im folgenden viel mit dieser Unterteilung rechnen werden, führen wir die Abkürzung

$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

dafür ein und verabreden, daß die x_i immer, wenn von $\boldsymbol{x}$ die Rede ist, die obigen Gleichungen und Ungleichungen erfüllen sollen, daß sie also tatsächlich eine Unterteilung von $[a, x]$ definieren.

Falls die gesuchte differenzierbare Funktion $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert, sagt uns – wie wir in Teil *c)* gesehen haben – der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß für geeignete Elemente ξ_i mit

$$a = x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \cdots < \xi_{n-2} < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n = x$$



folgt

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\,.$$

Natürlich kennen wir die Zahlen ξ_i nicht – selbst wenn wir wissen, daß F und damit die ξ_i überhaupt existieren. Deshalb betrachten wir einfach *beliebige* Zahlen ξ_i mit

$$a = x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \cdots < \xi_{n-2} < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n = x$$

und führen auch hier wieder die Abkürzung

$$\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$$

ein mit der Verabredung, daß immer, wenn ein $\underline{\xi}$ in Zusammenhang mit einem $\boldsymbol{x}$ auftritt, diese Ungleichungen erfüllt sein sollen.

Definition: Die RIEMANNsche Summe zu einem Paar $(\boldsymbol{x}, \underline{\xi})$ ist

$$I(\boldsymbol{x}, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\,.$$

Das RIEMANN-Integral soll der Grenzwert einer Folge RIEMANNscher Summen sein, wobei die Unterteilungen $\boldsymbol{x}$ immer feiner werden. Dieses „Feinerwerden" müssen wir natürlich auch noch erklären: Seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei Unterteilungen des Intervalls $[a, x]$; konkret sei

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

und

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = x\,.$$

Dann heißt $\boldsymbol{y}$ eine *Verfeinerung* von $\boldsymbol{x}$, wenn jedes Teilintervall (y_i, y_{i+1}) von $\boldsymbol{y}$ ganz in einem der Teilintervalle (x_j, x_{j+1}) von $\boldsymbol{x}$ liegt; $\boldsymbol{y}$ entsteht also aus $\boldsymbol{x}$, indem einige der Intervalle von $\boldsymbol{x}$ noch weiter unterteilt werden. Insbesondere muß dann $m \ge n$ sein.

Nun betrachten wir eine Folge $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ von Unterteilungen derart, daß

- $\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}$ stets eine Verfeinerung von $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ ist *und*
- die maximale Länge der Teilintervalle von $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null geht, d.h.

$$\lim_{\nu\to\infty} \max_{i=0}^{n_\nu - 1} (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) = 0\,.$$

Zu jeder Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ wählen wir willkürlich eine (im Sinne obiger Konvention dazu passende) Folge $\underline{\xi}^{(\nu)}$ von Zwischenpunkten und fragen nach Existenz und gegebenenfalls Wert des Grenzwerts

$$\lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})\,.$$

Dieser Grenzwert muß natürlich im allgemeinen nicht existieren, und wenn er existiert, kann er von der Wahl der Zwischenpunkte $\xi_i^{(\nu)}$ und von der Wahl einer Folge $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ von Unterteilungen abhängen. Wenn er unabhängig von all diesen Wahlen existiert und immer denselben Wert hat, bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert als das RIEMANN-*Integral* von f zwischen a und x, in Zeichen

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})\,.$$

Falls dieses Integral für jedes $x \in [a,b]$ existiert, sagen wir, f sei RIEMANN-*integrierbar* auf $[a,b]$.

ξ heißt *Integrationsvariable* und übernimmt die Rolle des Summationsindex in einer Summe: Genau wie beispielsweise

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$$

davon unabhängig ist, ob der Summationsindex i, j oder k heißt, ist auch

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^x f(u)\,du = \int_a^x f(t)\,dt$$

unabhängig davon, ob die Integrationsvariable mit ξ, u oder t bezeichnet wird.

6) Existenz des Riemann-Integrals für stetige Funktionen: Damit haben wir das RIEMANN-Integral definiert; wir wissen allerdings bisher für keine einzige Funktion, daß es existiert. In diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, daß es zumindest für *stetige* Funktionen immer existiert:

Satz: Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist RIEMANN-integrierbar auf $[a,b]$.

Zum *Beweis* müssen wir zeigen, daß das RIEMANN-Integral

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

für jedes $x \in [a,b]$ existiert.

Dazu fixieren wir ein beliebig vorgegebenes $x \in [a,b]$ und betrachten Folgen $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ von immer feiner werdenden Unterteilungen des Intervalls $[a,x]$; dazu entsprechende Folgen $(\underline{\xi}^{(\nu)})$ von Zwischenwerten und die Grenzwerte der RIEMANN-Summen $I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$.

1. Schritt: Für eine feste Folge $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ von Unterteilungen existiert der Grenzwert und ist unabhängig von der Wahl der Zwischenwerte $\xi_i^{(\nu)}$:

Um das einzusehen, betrachten wir für jede Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ die RIEMANNschen Obersummen und Untersummen: Da f nach Voraussetzung stetig ist, nimmt es in jedem abgeschlossenen Intervall sowohl sein Maximum als auch sein Minimum an; insbesondere werden also im Intervall $[x_i^{(\nu)}, x_{i+1}^{(\nu)}]$ ein Maximum $M_i^{(\nu)}$ und ein Minimum $m_i^{(\nu)}$ angenommen. Damit gilt unabhängig von der Wahl des Zwischenwerts $\xi_i^{(\nu)}$

$$m_i^{(\nu)} \le f(\xi_i^{(\nu)}) \le M_i^{(\nu)}\,.$$

Nach Definition ist

$$I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \xi^{(\nu)}) = \sum_{i=0}^{n_\nu-1} f(\xi_i^{(\nu)})\bigl(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}\bigr)\,;$$

ersetzen wir hierin $\xi_i^{(\nu)}$ jeweils durch $m_i^{(\nu)}$, so erhalten wir eine untere Abschätzung

$$s^{(\nu)} \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n_\nu-1} m_i^{(\nu)}\bigl(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}\bigr)$$

für $I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$; diese bezeichnen wir als RIEMANN*sche Untersumme* der Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$. Entsprechend liefert die Ersetzung durch $M_i^{(\nu)}$ eine obere Abschätzung

$$S^{(\nu)} \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n_\nu-1} M_i^{(\nu)}\bigl(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}\bigr)$$

für $I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$, die RIEMANN*sche Obersumme* der Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$.

Unabhängig von der Wahl der Zwischenwerte $\xi_i^{(\nu)}$ gilt somit

$$s^{(\nu)} \le I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) \le S^{(\nu)}\,,$$

ein Zusammenhang, der in Abbildung 46 noch einmal graphisch dargestellt ist: Die RIEMANNsche Untersumme ist gleich der Fläche der durchgezogenen Rechtecke, für die Obersumme kommt noch der gestrichelte Anteil dazu, und für die RIEMANNsche Summe $I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$

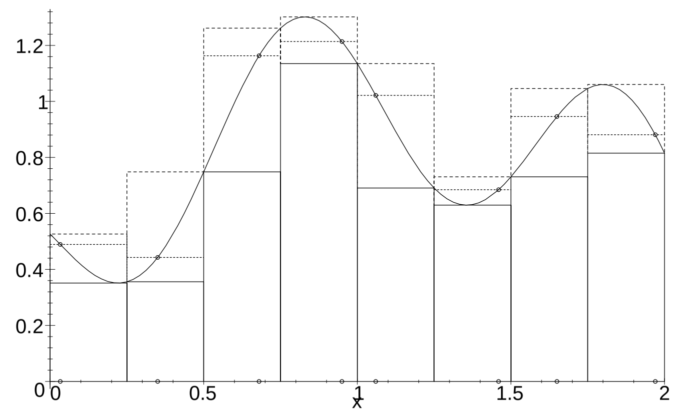


Abb. 46: Riemannsche Summen, Obersummen und Untersummen

muß man bis zu den punktierten Linien gehen. Die Werte $\xi_i^{(\nu)}$ sind auf der x-Achse durch kleine Kreise gekennzeichnet, ebenso die Punkte $\big(\xi_i^{(\nu)}, f(\xi_i^{(\nu)})\big)$ auf der Kurve.

Wenn wir jetzt noch zeigen können, daß die Folge der $s^{(\nu)}$ und die der $S^{(\nu)}$ beide gegen denselben Grenzwert konvergieren, muß wegen der Einschließung

$$s^{(\nu)} \leq I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) \leq S^{(\nu)}$$

auch $I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$ gegen diesen Grenzwert konvergieren, und die Behauptung im ersten Schritt ist bewiesen.

Vergleichen wir dazu zunächst die Untersummen $s^{(\nu)}$ und $s^{(\nu+1)}$: Die Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}$ entsteht aus $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ dadurch, daß einige der Intervalle weiter unterteilt werden. Ist aber $(x_i^{(\nu+1)}, x_{i+1}^{(\nu+1)})$ Teilintervall von $(x_j^{(\nu)}, x_{j+1}^{(\nu)})$, so kann das Minimum im Teilintervall natürlich nicht kleiner sein als im größeren Intervall, d.h. $s^{(\nu+1)} \geq s^{(\nu)}$. Somit ist die Folge der $s^{(\nu)}$ monoton wachsend.

Genauso folgt, daß die Folge der $S^{(\nu)}$ monoton fallend ist, und da stets $s^{(\nu)} \leq S^{(\nu)}$ ist, folgt weiter, daß

$$s^{(1)} \leq s^{(2)} \leq s^{(3)} \leq \cdots \leq S^{(3)} \leq S^{(2)} \leq S^{(1)} .$$

Insbesondere ist also $S^{(1)}$ eine obere Schranke für die Folge der $s^{(\nu)}$ und $s^{(1)}$ eine untere Schranke für die Folge der $S^{(\nu)}$.

Damit ist also die Folge $(s^{(\nu)})$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, während $(S^{(\nu)})$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Nach einem Satz aus der Analysis I (*Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.*) folgt daraus die Konvergenz beider Folgen.

Nun fehlt nur noch, daß beide denselben Grenzwert haben.

Dazu betrachten wir die Differenzen

$$\begin{aligned} S^{(\nu)} - s^{(\nu)} &= \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} M_i^{(\nu)}(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) - \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} m_i^{(\nu)}(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) \\ &= \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} (M_i^{(\nu)} - m_i^{(\nu)})(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) . \end{aligned}$$

Mit

$$\Delta^{(\nu)} \underset{\text{def}}{=} \max_i \big(M_i^{(\nu)} - m_i^{(\nu)}\big)$$

ist also

$$\begin{aligned} S^{(\nu)} - s^{(\nu)} &\leq \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} \Delta^{(\nu)}(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) = \Delta^{(\nu)} \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) \\ &= \Delta^{(\nu)}(x_n^{(\nu)} - x_0^{(\nu)}) = \Delta^{(\nu)}(x - a) , \end{aligned}$$

und das ist eine Nullfolge, falls wir zeigen können, daß die Folge der $\Delta^{(\nu)}$ eine ist.

Hier kommt nun die in Abschnitt *c)* eingeführte gleichmäßige Stetigkeit von f zum Tragen: Danach gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle Punkte $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ gilt: Ist $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$, so folgt $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon$.

Ist dabei für eine Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ jede der Differenzen $x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}$ kleiner als δ, so ist auch $M_i^{(\nu)} - m_i^{(\nu)} < \varepsilon$, denn sowohl $M_i^{(\nu)}$ als auch $m_i^{(\nu)}$ sind Funktionswerte, die irgendwo im Intervall $[x_i^{(\nu)}, x_{i+1}^{(\nu)}]$ angenommen werden.

Nun haben wir aber vorausgesetzt, daß die Unterteilungen $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ immer feiner werden, d.h. zu jedem $\delta > 0$ gibt es in der Tat ein ν_0, so daß $x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} < \delta$ für alle $\nu > \nu_0$ und alle i. Somit sind für $\nu > \nu_0$ alle Differenzen $M_i^{(\nu)} - m_i^{(\nu)}$ kleiner als ε, und damit ist auch $\Delta^{(\nu)} < \varepsilon$ für $\nu > \nu_0$. Also sind sowohl $(\Delta^{(\nu)})$ als auch $S^{(\nu)} - s^{(\nu)}$ Nullfolgen, d.h.

$$\lim_{\nu\to\infty} s^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} S^{(\nu)} .$$

Wie schon erwähnt, folgt daraus aufgrund der Einschließung

$$s^{(\nu)} \le I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) \le S^{(\nu)} ,$$

auch die Gleichung

$$\lim_{\nu\to\infty} S^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} S^{(\nu)} .$$

Da die linke und die rechte Seite obiger Ungleichung nicht von den $\xi_i^{(\nu)}$ abhängen, ist auch $\lim I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$ davon unabhängig, und damit ist der erste Schritt des Beweises beendet.

Der zweite ist zum Glück erheblich einfacher:

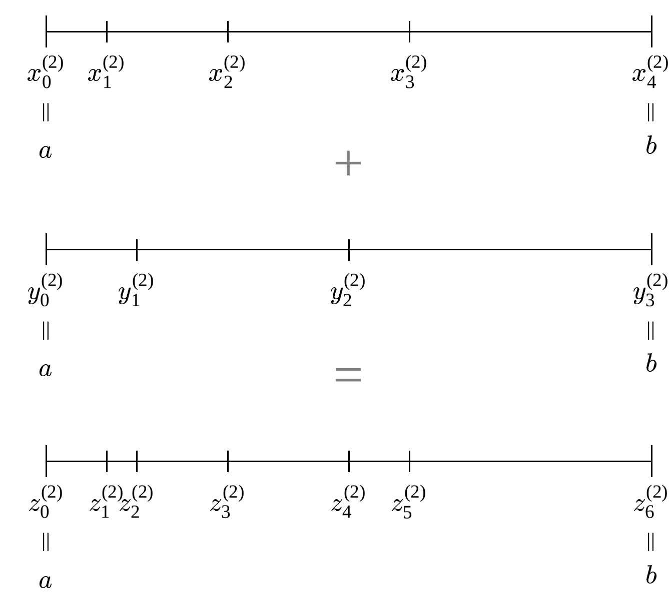
2. Schritt: $\lim\limits_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)})$ ist auch unabhängig von der Folge $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$:

Betrachten wir zwei Folgen $(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ und $(\boldsymbol{y}^{(\nu)})$ von Unterteilungen. Für jeden Index ν können wir zu den Unterteilungen $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ und $\boldsymbol{y}^{(\nu)}$ eine gemeinsame Verfeinerung $\boldsymbol{z}^{(\nu)}$ konstruieren, indem wir einfach die sämtlichen Zahlen $x_i^{(\nu)}$ und $y_j^{(\nu)}$ der Größe nach ordnen als $z_0^{(\nu)} = a, \ldots, z_r^{(\nu)} = x$.

Wie oben seien $s^{(\nu)}$ und $S^{(\nu)}$ die RIEMANNsche Unter- und Obersumme zur Unterteilung $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$; entsprechend seien $\widetilde{s}^{(\nu)}$ und $\widetilde{S}^{(\nu)}$ die zur Unterteilung $\boldsymbol{z}^{(\nu)}$. Da $\boldsymbol{z}^{(\nu)}$ eine Verfeinerung von $\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ ist, wissen wir aus dem ersten Schritt, daß

$$s^{(\nu)} \le \widetilde{s}^{(\nu)} \le \widetilde{S}^{(\nu)} \le S^{(\nu)}$$

ist; da die Folgen $(s^{(\nu)})$ und $(S^{(\nu)})$ denselben Grenzwert haben, müssen auch $(\widetilde{s}^{(\nu)})$ und $(\widetilde{S}^{(\nu)})$ gegen diesen Wert konvergieren und damit auch



die Folge der $I(\boldsymbol{z}^{(\nu)}, \tilde{\underline{\xi}}^{(\nu)})$, wobei $(\tilde{\underline{\xi}}^{(\nu)})$ irgendeine Folge von Zwischenwerten bezeichnet; wie wir bereits aus dem ersten Schritt wissen, hängt der Grenzwert nicht davon ab. Also ist

$$\lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{z}^{(\nu)}, \tilde{\underline{\xi}}^{(\nu)}) .$$

Genauso folgt, daß auch

$$\lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{y}^{(\nu)}, \overline{\underline{\xi}}^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{z}^{(\nu)}, \tilde{\underline{\xi}}^{(\nu)}) ,$$

wobei $(\overline{\underline{\xi}}^{(\nu)})$ die Folge der Zwischenwerte zu $\boldsymbol{y}^{(\nu)}$ bezeichnet, und dies zeigt schließlich die Behauptung

$$\lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \underline{\xi}^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} I(\boldsymbol{y}^{(\nu)}, \overline{\underline{\xi}}^{(\nu)}) .$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

7) Stückweise stetige Funktionen: Gelegentlich möchte man die Bedingung der Stetigkeit wenigstens ein bißchen lockern, um beispielweise auch einen Rechteckimpuls, der periodisch zwischen 0 und 1 (oder -1 und 1) wechselt, behandeln zu können. Die Existenz des RIEMANN-Integral wird durch solche kleineren Abweichungen nicht beeinträchtigt:

Definition: Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig,* wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < a_r = b$$

des Intervalls $[a,b]$ gibt, so daß f auf jedem der offenen Intervalle (a_i, a_{i+1}) stetig ist.

f ist also überall stetig außer eventuell in endlich vielen Punkten $a_0, \dots, a_r$. Der Wert in diesen Punkten kann, aber muß nicht mit dem linksseitigen oder rechtsseitigen Grenzwert der Funktion übereinstimmen; beispielsweise definiert man Rechteckimpulse gelegentlich auch durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2n-1 < x < 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{falls } 2n < x < 2n+1 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Satz: Eine stückweise stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist RIEMANN-integrierbar.

Beweis: f sei stetig in den offenen Intervallen (a_i, a_{i+1}) mit

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < a_r = b\,.$$

Wiederholt man den Beweis des entsprechenden Satzes für Funktionen, die auf ganz $[a,b]$ stetig sind, so funktioniert fast alles problemlos auch für f. Schwierigkeiten gibt es nur mit den Intervallen einer Unterteilung $\boldsymbol{x}$, die einen der Punkte a_i enthalten. In diesen Intervallen ist f nicht notwendigerweise stetig, so daß die Differenz zwischen dem Supremum und dem Infimum von f dort nicht mit Verkleinerung des Intervalls gegen Null gehen muß, sondern auch gegen einen von Null verschiedenen Wert, nämlich die „Sprunghöhe" bei a_i, konvergieren kann.

Nun gibt es aber in jeder Unterteilung nur endlich viele Intervalle, die ein a_i enthalten, und auch die Sprunghöhen sind begrenzt; gehen also alle Intervallängen gegen Null, so geht auch wie im Beweis des Satzes die Differenz zwischen RIEMANNschen Ober- und Untersummen gegen Null.

■

8) Noch einmal die Dirichletsche Sprungfunktion: In Abschnitt *b3)* waren wir nicht zufrieden mit dem Verhalten des dort heuristisch eingeführten Integrals für die DIRICHLETsche Sprungfunktion; schauen wir, was das nun eingeführte RIEMANN-Integral daraus macht. Sei also

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} ;$$

wir interessieren uns für $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Dazu sei $\boldsymbol{x}$ eine Unterteilung des Intervalls $[0,1]$. Unabhängig von der Wahl dieser Unterteilung können wir stets eine Folge $\underline{\xi}$ von rationalen Zwischenwerten finden, aber auch eine Folge $\underline{\widetilde{\xi}}$ von irrationalen. Dann ist, unabhängig von der Unterteilung $\boldsymbol{x}$,

$$I(\boldsymbol{x}, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = 1 - 0 = 1$$

und

$$I(\boldsymbol{x}, \underline{\widetilde{\xi}}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\widetilde{\xi}_i)(x_{i+1} - x_i) = 0\,.$$

Damit kann kein gemeinsamer Grenzwert existieren, und somit ist die DIRICHLETsche Sprungfunktion nicht RIEMANN-integrierbar – ein sehr viel überzeugenderes Ergebnis als das aus Abschnitt *b3).*

9) Ausblick: Das Lebesgue-Integral: Wir könnten allerdings auch argumentieren, daß es „nur" abzählbar unendlich viele rationale Zahlen, aber überabzählbar viele irrationale zwischen null und eins gibt; daher sollten letztere das Geschehen dominieren, und $\int_0^1 f(x)\,dx$ sollte verschwinden.

In der Tat kann man eine Verallgemeinerung des RIEMANN-Integrals definieren, das LEBESGUE-Integral, das für stückweise stetige Funktionen mit dem RIEMANN-Integral übereinstimmt und für die DIRICHLETsche Sprungfunktion den Wert Null liefert. Dazu geht man nach dem französischen Mathematiker HENRI LÉON LEBESGUE (1875-1941) bei den Unter- und Obersummen nicht wie bei RIEMANN von *endlich* vielen Rechtecken aus, sondern von *abzählbar unendlich* vielen. (Wie man dies im einzelnen macht, braucht uns hier nicht zu interessieren; wir werden uns im folgenden stets auf das RIEMANN-Integral beschränken.) Dieses LEBESGUE-Integral existiert *fast* immer: Man kann zwar die *Existenz* von Funktionen, für die es nicht existiert, *beweisen*,explizite Beispiele solcher Funktionen sind aber nicht bekannt.

10) Anwendung auf Flächeninhalte: Nachdem wir nun mit einen exakten Integralbegriff haben, bietet sich an, Flächen über dieses Integral zu *definieren:*

Definition: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion, so bezeichnen wir die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als *Fläche* zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$.

Was passiert, wenn f auch negative Werte annimmt? Für $f(x) = x$ etwa ist $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, wie man sich leicht überlegt anhand von Unterteilungen, die symmetrisch zur Null liegen. Auch dies läßt sich als Aussage über Flächeninhalte interpretieren – wenn man davon ausgeht, daß die Formel

$$\textit{Fläche} = \textit{Länge} \times \textit{Breite}$$

für die Rechteckfläche auch bei *negativer* Länge und/oder Breite gelten soll. Da Integrale nicht nur zur Flächenbestimmung, sondern auch etwa zur Bestimmung der Ladung in einem Kondensator verwendet werden, ist dies die Interpretation, die man in der Mathematik in den meisten

Fällen vorzieht; für die klassische Fläche im Sinne des Tapezierens muß man mit

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

arbeiten.

Im Sinne dieser negativen Längen und Breiten ist es auch sinnvoll, Integrale für $b < a$ zu definieren durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Insbesondere ist dann natürlich $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

d) Erste Integrationsregeln

Das RIEMANN-Integral stellt die heuristischen Überlegungen vom Beginn dieses Paragraphen insofern auf eine exaktere mathematische Grundlage, als wir nun einen Integralbegriff haben, der auch bei extrem ungewöhnlichen Funktionen wie der DIRICHLETschen Sprungfunktion keine unerwarteten Ergebnisse liefert. Was allerdings den Ausgangspunkt betrifft, die Umkehrung der Differentiation, wissen wir über das neue Integral noch gar nichts, und auch sonst kennen wir noch nicht viele Regeln über den Umgang damit und insbesondere auch über seine Berechnung *ohne* die umständlichen und sehr langsam konvergierenden RIEMANN-Summen.

In diesem Abschnitt sollen die ersten (und einfachsten) solchen Regeln zusammengestellt werden; danach erweitern wir zunächst unser Instrumentarium, um dann damit auch kompliziertere und interessantere Regeln zu beweisen.

1) Monotonieregel: Eine der einfachsten, aber trotzdem oft nützlichen Regeln für den Umgang mit Integralen übersetzt Größerbeziehungen zwischen Integranden in Größenbeziehungen zwischen Integralen:

Satz: f und g seien stückweise stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, und für alle $x \in [a,b]$ sei $f(x) \le g(x)$. Dann ist auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Insbesondere ist

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Beweis: Wir betrachten eine Unterteilung $\boldsymbol{x}$ des Intervalls $[a,b]$ und eine dazu kompatible Sequenz $\underline{\xi}$ von Zwischenwerten; $I(\boldsymbol{x},\underline{\xi})$ sei die zugehörige RIEMANN-Summe für f und $J(\boldsymbol{x},\underline{\xi})$ die für g. Da für jedes ξ_i nach Voraussetzung $f(\xi_i) \le g(\xi_i)$ ist, folgt unmittelbar aus der Definition der RIEMANN-Summen, daß

$$I(\boldsymbol{x},\underline{\xi}) \le J(\boldsymbol{x},\underline{\xi})$$

ist. Da sich eine solche Kleinergleichbeziehung auch auf Grenzwerte überträgt, ist daher

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

wie behauptet.

Insbesondere können wir dies auch anwenden auf die Ungleichungskette

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

und erhalten

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

d.h.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

■

2) Linearität und Zusammensetzung: Genauso einfach ist die Linearitätsregel:

Satz: Für zwei stückweise stetige Funktionen $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und zwei reelle Zahlen α,β ist

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Beweis: Wie beim letzten Satz: Für jede RIEMANN-Summe zu einer festen Unterteilung $\boldsymbol{x}$ und jede damit kompatible Zwischenwertsequenz $\underline{\xi}$ gilt die zur Behauptung des Satzes analoge Gleichung, und damit gilt im Limes auch der Satz selbst. ■

Für die Zusammensetzung von Integrationsintervallen gilt erwartungsgemäß

Satz: Für $a \le b \le c$ und eine stückweise stetige Funktion $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Beweis: $\int_a^c f(x)\,dx$ kann als Grenzwert von RIEMANN-Summen zu einer beliebigen Folge sich verfeinernder Unterteilungen von $[a,c]$ berechnet werden; insbesondere können also Unterteilungen gewählt werden, die den Zwischenpunkt b enthalten, und dafür folgt die Behauptung unmittelbar. ■

3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Der Mittelwertsatz der *Differentialrechnung* ist der wohl wichtigste Satz aus der Analysis I. Mit dieser überragenden Bedeutung kann der Mittelwertsatz der *Integralrechnung* nicht konkurrieren; trotzdem ist auch er eine sehr nützliche

Aussage, die insbesondere auch die zu Beginn dieses Paragraphen postulierte Interpretation von Integralen als Mittelwerten für das RIEMANN-Integral auf eine solide Grundlage stellt.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen sei der Satz zunächst etwas allgemeiner formuliert, als wir ihn im Augenblick bentigen; an der Schwierigkeit des Beweises ändert diese Verallgemeinerung nichts.

Satz: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion; $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig und nirgends negativ. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so daß

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Die Funktion g sollte man sich dabei als eine „Gewichtsfunktion“ vorstellen, die die verschiedenen x-Werte verschieden stark gewichtet. Am anschaulichsten ist der Spezialfall $g \equiv 1$, der deshalb noch einmal getrennt angegeben sei:

Korollar: Für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Mit anderen Worten: Der „Mittelwert“ der Funktion f im Intervall $[a,b]$ existiert nicht nur, sondern wird auch an (mindestens) einer Stelle im Intervall angenommen.

Zum *Beweis* des Satzes betrachten wir das Minimum m und das Maximum M von f auf $[a,b]$. Da g nirgends negativ wird, gilt dann auch für jedes $x \in [a,b]$

$$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M\,g(x)$$

und damit nach der Monotonieregel

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Es gibt daher eine reelle Zahl μ zwischen m und M, den Mittelwert, so daß

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

ist, und da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz mindestens ein $\xi \in [a,b]$, für das $f(\xi) = \mu$ ist.

Damit ist der Satz bewiesen, und das Korollar ist natürlich einfach der Spezialfall $g \equiv 1$, für den das Integral über g gleich $b-a$ ist. ■

Man beachte, daß es hier nicht genügt, daß f nur eine *stückweise* stetige Funktion ist: Für

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

ist

$$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dx = \frac{1}{2}$$

nicht in der Form $f(\xi)$ darstellbar.

e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Eine Motivation zur Einführung eines Integrals war die Suche nach einer Umkehroperation zur Differentiation: Genau wie die Differentiation aus einem zeitabhängigen Weg eine Geschwindigkeit macht, wollten wir ausgehend von einer zeitabhängigen Geschwindigkeit den Weg zurückbekommen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt uns nun endlich, daß wir dieses Ziel erreicht haben:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechung: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und

$$F_a(x) = \int_a^b f(\xi)\,d\xi\,.$$

Dann ist $F_a'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Ist umgekehrt F eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung auf dem offenen Intervall (a, b) mit f übereinstimmt, so gibt es eine reelle Zahl C derart, daß $F(x) = F_a(x) + C$ ist.

Beweis: Die Ableitung von F_a ist

$$F_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \,;$$

für positives h ist

$$F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^{x} f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx$$

(s. Abschnitt *b)*); für negatives h ist entsprechend

$$F_a(x+h) - F_a(x) = -\int_{x+h}^{x} f(x)\,dx \,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus dem vorigen Abschnitt gibt es in jedem der beiden Fälle ein ξ zwischen x und $x + h$, so daß das Integral gleich $|h| \cdot f(\xi)$ ist, d.h.

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(\xi)\,.$$

Geht nun h gegen Null, so muß die zwischen x und $x+h$ liegende Zahl ξ gegen x gehen; wegen der Stetigkeit von f ist also $F_a'(x) = f(x)$

Ist F eine weitere Funktion mit Ableitung f, so hat die Differenz h von F und F_a die Ableitung Null. Nun erinnern wir uns an die Analysis I: Wenn die Ableitung einer Funktion $h(x)$ verschwindet, muß die Funktion konstant sein. In der Tat: Gäbe es im Definitionsbereich von h zwei Werte $x_1 \neq x_2$ mit $h(x_1) \neq h(x_2)$, so gäbe es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so daß

$$\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = h'(\xi)$$

wäre. Hier steht links eine von Null verschiedene Zahl, rechts aber Null, ein Widerspruch.

Also gibt es eine Konstante C, so daß $F(x) - F_a(x) = C$ oder

$$F(x) = F_a(x) + C$$

ist, wie behauptet. ■

Als Anwendung für die Berechnung bestimmter Integrale ergibt sich das folgende

Korollar: Ist F irgendeine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß $F'(x) = f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis: Mit obigen Bezeichnungen ist das Integral gleich $F_a(b)$. Zur Funktion F gibt es nach dem Hauptsatz eine Konstante C, so daß $F(x) = F_a(x) + C$ ist. Damit ist $F(b) - F(a) = F_a(b)$, wie gewünscht. ■

Für „einfache“ Integranden ist dies im allgemeinen die beste Möglichkeit zur Berechnung eines Integrals; die Funktionen F haben daher einen Namen verdient:

Definition: Eine differenzierbare Funktion F heißt *Stammfunktion* von f, wenn $F'(x) = f(x)$ ist; wir schreiben

$$F(x) = \int f(\xi)\,d\xi + C\,,$$

wobei die *Integrationskonstante* C die Nichteindeutigkeit der Stammfunktion ausdrückt.

Diese Nichteindeutigkeit sorgt auch dafür, daß zwar nach obigem Hauptsatz die Differentiation die Integration rückgängig macht, die Integration umgekehrt aber die Differentiation nur bis auf auf eine Konstante:

Korollar: $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Beweis: Klar, denn f ist eine Stammfunktion von f'. ■