wobei Betragsstriche die Länge eines Vektors bezeichnen sollen und $\measuredangle(\vec v,\vec w)$ für den Winkel zwischen $\vec v$ und $\vec w$ steht. Da

$$\cos(2\pi-\varphi)=\cos(-\varphi)=\cos\varphi$$

ist, folgt sofort das *Kommutativgesetz*

$$\vec v\cdot\vec w=\vec w\cdot\vec v$$

für das Skalarprodukt; außerdem folgt wegen $\cos 0=1$, daß

$$\vec v\cdot\vec v=|\vec v|^2 \quad\text{oder}\quad |\vec v|=\sqrt{\vec v\cdot\vec v}$$

ist. Weiter ist $\cos(\pi/2)=\cos(3\pi/2)=0$ und damit $\vec v\cdot\vec w=0$, falls $\vec v$ und $\vec w$ aufeinander senkrecht stehen; falls keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist, stehen $\vec v$ und $\vec w$ *genau dann* senkrecht aufeinander, wenn $\vec v\cdot\vec w=0$ ist.

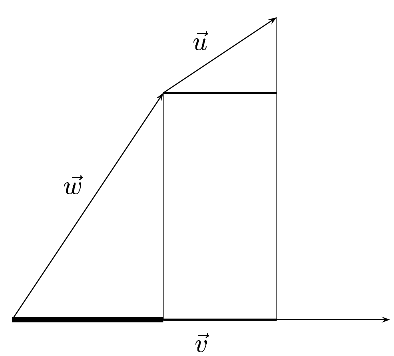


Abb. 13: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt kann auch geometrisch interpretiert werden: Da der Cosinus eines Winkels gleich Ankathete durch Hypothenuse ist, zeigt Abbildung 13, daß $|\vec w|\cos\measuredangle(\vec v,\vec w)$ gerade die Länge des senkrecht auf die von $\vec v$ erzeugte Gerade projizierten Vektors $\vec w$ ist; in der Zeichnung ist dies die fett eingezeichnete Strecke.



Addieren wir zu $\vec w$ einen weiteren Vektor $\vec u$, so ist auch hier wieder $|\vec u|\cos\measuredangle(\vec v,\vec u)$ die (in Abbildung 13 halbfett eingezeichnete) Länge des auf die von $\vec v$ erzeugte Gerade projizierten Vektors $\vec u$ und entsprechendes gilt für $\vec w+\vec u$; wir erhalten somit die Regel

$$\vec v\cdot(\vec w+\vec u)=\vec v\cdot\vec w+\vec v\cdot\vec u\,,$$

und damit wegen des Kommutativgesetzes auch

$$(\vec v+\vec w)\cdot\vec u=\vec v\cdot\vec u+\vec w\cdot\vec u\,.$$

Zum Berechnen des Skalarprodukts ist die bisherige Definition für viele Fälle recht unhandlich, da Vektoren oft in einer solchen Weise gegeben sind, daß man den Winkel zwischen ihnen *nicht* ohne weiteres kennt. Um gut rechnen zu können, wählen wir eine Basis aus drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Vektoren $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$ der Länge eins. Für diese Vektoren läßt sich das Skalarprodukt leicht ausrechnen: Da zwei verschiedene stets aufeinander senkrecht stehen und jeder einzelne die Länge eins hat, ist

$$\vec e_i\cdot\vec e_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{falls } i\neq j\\ 1 & \text{falls } i=j\end{cases}.$$

($\delta_{ij}$ ist das aus §2 bekannte KRONECKER-$\delta$)

Für zwei Vektoren

$$\vec v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\vec w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

ist dann

$$\vec v\cdot\vec w=(v_1\vec e_1+v_2\vec e_2+v_3\vec e_3)\cdot(w_1\vec e_1+w_2\vec e_2+w_3\vec e_3)\,,$$

und nach obigen Rechenregeln läßt sich dies berechnen als

$$\vec v\cdot\vec w=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}v_iw_j\,\vec e_i\vec e_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}v_iw_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}v_iw_i\,.$$

In dieser Form werden Skalarprodukte meistens ausgerechnet.

Im Dreidimensionalen (und nur dort) gibt es auch noch das sogenannte *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt.* Wie die beiden Namen sagen, liefert es als Ergebnis einen Vektor und wird mit $\vec v\times\vec w$ bezeichnet.

Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ soll die Länge

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,|\sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})|$$

haben und senkrecht stehen sowohl auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$. Insbesondere ist damit $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ genau dann, falls $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe (oder entgegengesetzte) Richtung haben, oder (mindestens) einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist, d.h. also genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

In allen anderen Fällen spannen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eine Ebene auf, und $\vec{v} \times \vec{w}$ muß auf dieser Ebenen senkrecht stehen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder er steht ab nach oben oder nach unten (wie immer man auch oben und unten festlegen möchte; für eine beliebige Ebene ist das natürlich völlig willkürlich).

Um diese beiden Fälle voneinander zu unterscheiden, benötigen wir einen neuen Begriff: Wir sagen, daß drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$, die nicht in einer Ebenen liegen, ein *Rechtssystem* bilden, wenn sich die Finger der *rechten* Hand so ausrichten lassen, daß der Daumen in Richtung von $\vec{v}_1$ zeigt, der Zeigefinger in Richtung von $\vec{v}_2$ und der Mittelfinger in Richtung von $\vec{v}_3$. Alternativ kann man es, wenn der dritte Vektor so wie hier senkrecht auf den beiden ersten steht, auch so definieren, daß sich ein von $\vec{v}_1$ nach $\vec{v}_2$ gedrehter Korkenzieher in Richtung $\vec{v}_3$ in den Kork bohrt. Ähnlich kann man das Rechtssystem auch mit Schrauben definieren; da es allerdings neben den (üblichen) Rechtsschrauben auch die (seltenen) Linksschrauben gibt, ist diese Definition eventuell zirkulär: Alles hängt davon ab, wie man Rechtsschrauben definiert.

Aus jeder dieser Regeln folgt sofort die *Antikommutativität* des Vektorprodukts:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}\,.$$

Weitere Rechenregeln für das Vektorprodukt lassen sich leicht geometrisch ableiten: Da der Sinus eines Winkels gleich Gegenkathete durch Hypothenuse ist, ist in der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebenen $|\vec{w}|\,|\sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})|$ gleich der Länge des auf die senkrecht auf $\vec{v}$ stehenden Geraden projizierten Vektors $\vec{w}$, das heißt also gleich der Höhe des in Abbildung 14 eingezeichneten Rechtecks. Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ ist daher gleich dem Flächeninhalt dieses Rechtecks und damit – wie



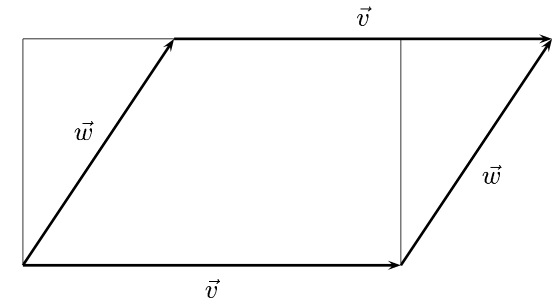


Abb. 14: Geometrische Interpretation des Vektorprodukts

eine Scherung zeigt – gleich der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Damit folgt, daß

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$$

und wegen der Antikommutativität entsprechend auch

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

ist.

Um das Vektorprodukt in Koordinaten ausrechnen zu können, müssen wir zunächst die Produkte der $\vec{e}_i$ kennen; diese können wir ausrechnen, sobald wir wissen, ob $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ ein Rechtssystem oder ein (analog zu definierendes) Linkssystem bilden. Wir nehmen an, daß sie ein Rechtssystem bilden; dann folgt sofort, daß $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ ist, und nach einigen Fingerübungen auch, daß

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

ist. Die Produkte mit vertauschten Faktoren sind natürlich gerade das negative davon, und $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$. Für

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \times (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3)\,,$$

und nach obigen Rechenregeln ist dies gleich

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_i w_j\,\vec e_i \times \vec e_j$$
$$= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec e_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec e_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec e_3\,,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2\\ v_3w_1 - v_1w_3\\ v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix}.$$

Dies läßt sich dadurch merken, daß man im Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vec e_1 & & \vec e_2 & & \vec e_3 & & \vec e_1 & & \vec e_2\\
 & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & \\
v_1 & & v_2 & & v_3 & & v_1 & & v_2\\
 & \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & \\
w_1 & & w_2 & & w_3 & & w_1 & & w_2
\end{array}$$

von $\vec e_i$ ausgeht und als dessen Koeffizient das Zweierprodukt entlang der schrägen Linie nach rechts unten *positiv* und das entlang der schrägen Linie nach links unten *negativ* nimmt.

In diesem Paragraphen geht es uns um ein Kriterium, wann $n$ Vektoren in $k^n$ linear abhängig sind. Das Kreuzprodukt sagt uns, wann zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind. Um ein Kriterium für zwei Vektoren $\vec v = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec w = \binom{w_1}{w_2}$ im $\mathbb{R}^2$ zu bekommen, betten wir diese ein in den $\mathbb{R}^3$, indem wir eine dritte Komponente Null hinzufügen; dann sind $\vec v$ und $\vec w$ genau dann linear abhängig, wenn

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix}$$

der Nullvektor ist, wenn also $v_1w_2 - v_2w_1 = 0$ ist.

**Definition:** Für zwei Vektoren $\vec v = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec w = \binom{w_1}{w_2}$ aus dem Vektorraum $k^2$ über einem Körper $k$ bezeichnen wir die Zahl

$$\det(\vec v, \vec w) \underset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\end{vmatrix} \underset{\text{def}}{=} v_1w_2 - v_2w_1$$



als *Determinante* von $\vec v$ und $\vec w$.

Auch unabhängig von der Herleitung über das Kreuzprodukt ist klar, daß $\vec v$ und $\vec w$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\det(\vec v, \vec w)$ verschwindet. Genauer haben wir folgende drei Eigenschaften:

(D1) $\det(\vec u, \vec v) = -\det(\vec v, \vec u)$

(D2) $\det(\vec u, \vec v)$ ist linear in jedem ihrer beiden Argumente, d.h.

$$\det(\lambda\vec u_1 + \mu\vec u_2, \vec v) = \lambda\det(\vec u_1, \vec v) + \mu\det(\vec u_2, \vec v)$$

und

$$\det(\lambda(\vec u, \lambda\vec v_1 + \mu\vec v_2) = \lambda\det(\vec u, \vec v_1) + \mu\det(\vec u, \vec v_2)\,.$$

(D3) $\det(\vec u, \vec v) = 0$ genau dann, wenn $\vec u$ und $\vec v$ linear abhängig sind.

## b) Das Spatprodukt

Die Interpretation der Länge des Vektorprodukts als Fläche eines Parallelogramms wirft die Frage auf, ob man vielleicht auch Volumina auf diese Weise berechnen kann; dies würde dann auch auf ein Kriterium für die lineare Abhängigkeit liefern, denn drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie einen Körper mit Volumen ungleich null aufspannen.

Zwei Vektoren liegen stets in einer Ebenen; kommt noch ein *dritter* Vektor dazu, entsteht ein dreidimensionales Analogon zum Parallelogramm, das in Abbildung 15 gezeigte *Parallelepiped*, das man sich als einen verzerrten Quader vorstellen kann, dessen rechte Winkel zu Winkeln einer beliebigen Größe wurden. Es wird auch als *Spat* bezeichnet, da Kalkspat und einige Feldspäte gelegentlich Kristalle dieser Form bilden. Aus dem Physikunterricht der Schule ist vielleicht der sogenannte Isländischen Doppelspat bekannt, eine der vielen Formen des Kalkspats: Dieser bildet meist sehr schöne Parallelepipede und ist vor allem bekannt durch seine ungewöhnlich stark ausgeprägte Doppelbrechung, die deshalb sehr häufig anhand dieser Kristalle demonstriert wird. (Sprachlich ist die Bezeichnung *Spat* für das Parallelepiped nicht sonderlich sinnvoll, denn die Endung „spat“ beim Feldspat oder Kalkspat

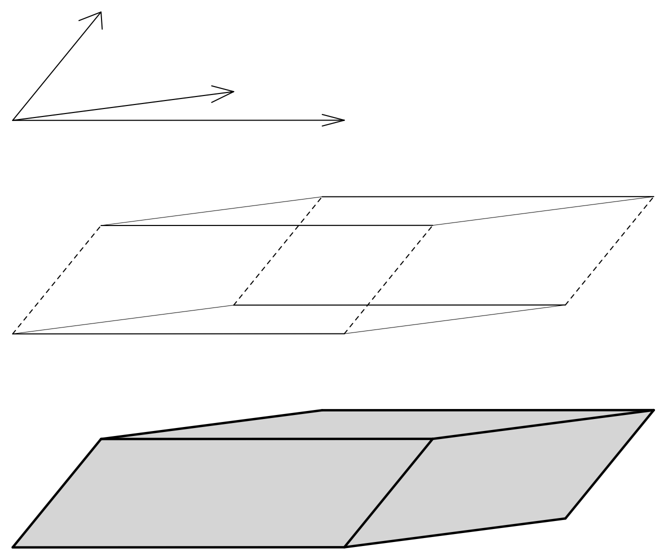

Abb. 15: Das von drei Vektoren aufgespannte Parallelepiped

deutet nur auf die leichte Spaltbarkeit des Materials hin; sie hat nichts mit der geometrischen Form zu tun.)

Das Volumen eines Parallelepipeds läßt sich auf ähnliche Weise berechnen wie das eines Parallelogramms: Durch Scherung wie in Abbildung 16 kann man erreichen, daß der dritte Vektor senkrecht auf den beiden anderen steht; das Volumen des Parallelepipeds ist also gleich dem Volumen des entsprechenden Prismas. Das Volumen eines Prismas wiederum ist gleich der Grundfläche mal der Höhe, und die Grundfläche ist eine uns bekannte Parallelogrammfläche.

Bezeichnen wir also die Vektoren der Reihe nach als $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$, so ist die Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms gleich $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Die Höhe des Prisma ist gleich der Länge des auf eine Achse



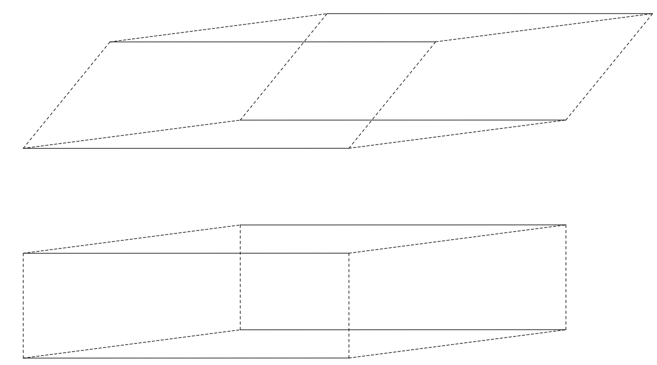

Abb. 16: Scherung eines Parallelepipeds zum Prisma

senkrecht zum Parallelogramm projezierten Vektors $\vec{w}$.

Diese Achse wird beispielsweise aufgespannt durch den Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$; wir können die Höhe also berechnen als Betrag des Skalarprodukt von $\vec{w}$ mit einem Einheitsvektor, der dieselbe Richtung hat wie $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$h = \left| \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \cdot \vec{w} \right| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,.$$

Das Volumen des Prismas und damit des Parallelepipeds ist somit gleich

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \,.$$

Wir bezeichnen deshalb das Produkt

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

der drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ als das *Spatprodukt* dieser Vektoren; sein Betrag ist gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Da dieses Volumen nicht von der Reihenfolge der Vektoren abhängt, ist auch das Spatprodukt bis auf Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Vektoren; Nachrechnen zeigt, daß

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

dasselbe Vorzeichen haben; das andere Vorzeichen haben die drei Produkte

$$(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} \,,$$

was man schon daran sieht, daß hier die Reihenfolge der Faktoren des Kreuzprodukts umgekehrt wurde.

In Koordinaten ausgedrückt ist $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$$= \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_e - u_2v_1w_3 .$$

Diese Formel läßt sich leicht merken nach der folgenden Regel von PIERRE SARRUS (1798–1861), von der wir bereits beim Kreuzprodukt einen Spezialfall kennengelernt haben: Schreibt man die Komponenten der Vektoren in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 & & v_1 & & w_1 & & u_1 & & v_1 \\ & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & \\ u_2 & & v_2 & & w_2 & & u_2 & & v_2 \\ & \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & \\ u_3 & & v_3 & & w_3 & & u_3 & & v_3 \end{array} ,$$

so sind die Produkte entlang der drei schrägen Linien von links oben nach rechts unten, der Hauptdiagonalen und ihrer Parallelen also, positiv zu rechnen und die entlang der drei schrägen Linien von rechts oben nach links unten negativ.

**Definition:** Für drei Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

aus dem Vektorraum $k^3$ über einem Körper $k$ bezeichnen wir die Zahl

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \underset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{def}}{=} u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_e - u_2v_1w_3$$

als *Determinante* von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.

Zumindest im $\mathbb{R}^3$ wissen wir dann, daß drei Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn ihre Determinante verschwindet.



Da der Betrag der Determinante das Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds ist, ist dieser Betrag unabhängig von der Reihenfolge der Vektoren. Das Vorzeichen hängt aber natürlich von der Reihenfolge ab, denn wegen der Schiefsymmetrie des Vektorprodukts ist beispielsweise

$$\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) ;$$

entsprechend ändert sich das Vorzeichen, wie man sich leicht überzeugt, bei jeder Vertauschung der Reihenfolge zweier Vektoren.

Da sowohl das Vektorprodukt als auch das Skalarprodukt linear in ihren Argumenten sind, ist auch det linear in jedem ihrer drei Argumente, wir haben also die drei Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ändert ihr Vorzeichen, nicht aber ihren Betrag, wenn irgendwelche zwei der Argumente miteinander vertauscht werden.

(D2) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ist linear in jedem ihrer drei Argumente.

(D3) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ genau dann, wenn $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

### c) Forderungen an eine allgemeine Determinante

Wir möchten gerne für beliebige endlichdimensionale Vektorräume $V$ eine Determinantenfunktion definieren, d.h. wir suchen für einen $n$-dimensionalen Vektorraum $V$ eine Abbildung

$$\det\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ mal}} \to k; \quad (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \mapsto \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$$

mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ ändert ihr Vorzeichen, nicht aber ihren Betrag, wenn irgendwelche zwei ihrer Argumente miteinander vertauscht werden.

(D2) $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ ist linear in jedem ihrer $n$ Argumente.

(D3) $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = 0$ genau dann, wenn $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear abhängig sind.

Um zu zeigen, daß es eine solche Abbildung auch tatsächlich gibt, folgen wir einer auch sonst bei Existenzbeiweisen oftmals nützlichen

Strategie: Wir nehmen an, wir *hätten* bereits eine Funktion det mit den Eigenschaften (D1) bis (D3), und versuchen dann, diese Funktion aufgrund dieser Eigenschaften möglichst explizit auszurechnen. Dies wird auf eine Formel für det führen, die wir dann als *Definition* nehmen können, wenn wir nachweisen, daß sie (D1) bis (D3) erfüllt.

Ausgangspunkt ist eine Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ von $V$; für diese ist wegen Eigenschaft (D3) dann $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \neq 0$. Über den genauen Wert wissen wir nichts, denn mit det erfüllt offensichtlich auch jedes skalare Vielfache $\lambda \cdot \det$ mit $\lambda \neq 0$ die Forderungen (D1) bis (D3).

Wir betrachten nun $n$ beliebige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ und schreiben diese bezüglich der Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ als Linearkombinationen

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_j$$

der gewählten Basisvektoren.

Sukzessive Anwendung der Linearitätsregel (D2) auf die $n$ Argumente von det führt auf

$$\begin{aligned}
\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) &= \det\Bigl(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \vec{e}_{j_1}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\Bigr) \\
&\underset{(D2)}{=} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det(\vec{e}_{j_1}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det\Bigl(\vec{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} \vec{e}_{j_2}, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\Bigr) \\
&\underset{(D2)}{=} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \det(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n) \\
&\;\;\vdots \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \det(\vec{e}_{j_1}, \cdots, \vec{e}_{j_n}) .
\end{aligned}$$



Um dies noch weiter ausrechnen zu können, müssen wir die Vektoren $\vec{e}_{j_\nu}$ in jedem der Summanden in die natürliche Reihenfolge bringen; dabei hilft die Regel (D1). Eine ganze Reihe von Summanden können wir allerdings gleich von vornherein außer Acht lassen, denn nach (D3) ist

$$\det(\vec{e}_{j_1}, \cdots, \vec{e}_{j_n}) = 0 ,$$

wenn (mindestens) zwei der $\vec{e}_{j_\nu}$ übereinstimmen: Falls $\vec{e}_{j_\nu}$ und $\vec{e}_{j_\mu}$ übereinstimmen, ist $\vec{e}_{j_\nu} - e_{j_\mu} = \vec{0}$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Ein von Null verschiedener Wert ist also nur möglich, wenn $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ ist, wenn also die Abbildung

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}; \quad \nu \mapsto j_\nu$$

bijektiv ist.

Unsere nächste Aufgabe wird daher sein, solche Abbildungen zu studieren und sie auf Vertauschungen zweier Elemente zurückzuführen, so daß wir schließlich die Summanden mittels (D1) auf $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ zurückführen können.

## d) Permutationen

**Definition:** *a)* Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} .$$

Sie wird auch kurz als

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

geschrieben.

*b)* Eine Transposition ist eine Permutation $\tau$, die zwei Elemente von $\{1, \dots, n\}$ vertauscht und den Rest festläßt. Sind $i, j$ die beiden Elemente, die von $\tau$ vertauscht werden, so schreiben wir kurz $\tau = (i\ j)$.

*c)* Die Menge aller Permutationen $\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ wird als *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet.

Die Matrixdarstellung einer Permutation hat natürlich nichts mit Abbildungsmatrizen von linearen Abbildungen zu tun; hier verwenden wir die Matrix nur als Darstellung der Wertetabelle von $\pi$.

Das Wort *Gruppe* tauchte bereits in §1 auf im Zusammenhang mit der Definition eines Vektorraum; es wird langsam Zeit, es wirklich zu definieren. Intuitiv versteht man unter einer Gruppe eine Struktur, deren Elemente sich so miteinander verknüpfen lassen, daß die „üblichen“ Rechenregeln gelten – mit Ausnahme, eventuell, des Kommutativgesetzes, denn dieses gilt ja beispielsweise schon bei der Matrixmultiplikation nicht mehr. Die exaktes Definition ist die folgende:

**Definition:** Eine *Gruppe* $(G, \circ)$ ist eine Menge $G$ zusammen mit einer inneren Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G$, für die gilt:

1. $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle $g, h, k \in G$
2. Es gibt ein *Neutralelement* $e \in G$, so daß für alle $g \in G$ gilt $e \circ g = g \circ e = g$.
3. Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein *inverses Element* $g' \in g$, so daß $g \circ g' = g' \circ g = e$ ist.

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn zusätzlich gilt

4. $g \circ h = h \circ g$ für alle $g, h \in G$.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Im August 2001 kündigte der norwegische Ministerpräsident zu seinen Ehren die Stiftung eines ABEL-Preises für Mathematik an, der ab 2003 in ähnlicher Ausstattung und ähnlicher Weise wie die Nobelpreise verliehen werden soll.

Im Sinne dieser Definition bilden beispielsweise die ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung eine Gruppe, sogar eine abelsche Gruppe, nicht aber die natürlichen Zahlen, denn es gibt beispielsweise keine natürliche Zahl $n$, so daß $n + 2 = 0$ ist, und auch die Null liegt zumindest nach der in dieser Vorlesung zugrundegelegten Konvention nicht in $\mathbb{N}$. Entsprechend bilden die ganzen Zahlen bezüglich der *Multiplikation* keine Gruppe, da die Gleichung $5x = 1$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar ist, aber die positiven rationalen Zahlen bilden eine multiplikative Gruppe. Die



rationalen Zahlen bilden keine, da $0x = 1$ unlösbar ist, aber die rationalen Zahlen ohne Null sind eine multiplikative Gruppe, genauso auch die *invertierbaren* $n \times n$-Matrizen.

Da wir die Menge aller Permutationen als *symmetrische Gruppe* bezeichnen, sollten auch diese eine Gruppe bilden.

Die Gruppenoperation ist natürlich die Hintereinanderausführung von Abbildungen, das Produkt zweier Permutationen $\pi$ und $\omega$ ist also die Abbildung $\pi \circ \omega$, die eine Zahl $i$ abbildet auf $(\pi \circ \omega)(i) = \pi\big(\omega(i)\big)$.

Die Assoziativität der Verknüpfung ist, wie stets bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen, klar; Einselement ist die identische Permutation, und Inverse gibt es, da eine Permutation nach Definition bijektiv ist und somit eine Umkehrabbildung hat. Speziell für Transpositionen ist die Bestimmung dieser Umkehrabbildung besonders einfach: Da eine Transposition nicht anderes tut, als zwei Elemente miteinander zu vertauschen, macht sie sich selbst rückgängig und ist somit ihr eigenes Inverses.

Wie meist bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist auch bei Permutationen das Kommutativgesetz nicht erfüllt. Als Beispiel betrachten wir die beiden Transpositionen (1 2) und (1; 3).

Beim Produkt $(1\ 2) \circ (1\ 3)$ wird zuerst die Transposition (1 3) ausgeführt, die die Zahlen 1 und 3 vertauscht; sodann vertauscht (1 2) die Zahlen 1 und 2:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Somit ist

$$(1\ 2) \circ (1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beim Produkt $(1\ 3) \circ (1\ 2)$ dagegen wird zuerst die Transposition (1 3) ausgeführt und dann erst (1 2); hier ist der Gang der Vertauschungen also

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1\,, \end{array}$$

d.h.

$$(1\ 3) \circ (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aus der Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

einer Permutation läßt sich leicht die Anzahl möglicher Permutationen von $n$ Elementen ablesen: Füllen wir die untere Zeile von links aus systematisch auf, so gibt es für $\pi(1)$ noch die volle Auswahl unter allen $n$ Elementen, für $\pi(2)$ kommen alle Elemente in Frage *außer* $\pi(1)$, also nur noch $n-1$ Stück, für $\pi(3)$ gibt es entsprechend nur noch $n-2$, bis es schließlich bei $\pi(n)$ überhaupt nichts mehr zu wählen gibt, denn $\pi(n)$ ist die einzige Zahl, die bis dahin noch nicht in der zweiten Zeile der Matrix steht. Insgesamt gibt es also

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ enthält somit $n!$ Elemente.

Für die Anwendung von Regel (D1) auf die weitere Berechnung von Determinanten ist der folgende Satz wichtig:

**Satz:** Jede Permutation $\pi$ kann als Produkt

$$\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$$

von Transpositionen geschrieben werden.

*Beweis:* Da es sich hier um eine Mathematikvorlesung für (technische) Informatiker handelt, möchte ich sowohl einen mathematischen als auch einen informatischen Beweis geben.



Der einfachste mathematische Beweis benutzt vollständige Induktion nach der Elementanzahl $n$ der zu permutierenden Menge. Für $n = 1$ gibt es keine Permutation außer der Identität, die man als leeres Produkt von Transpositionen betrachten kann; da aber nicht jeder diese Art von logischen Taschenspielertricks liebt, betrachten wir zur Vorsicht auch noch den Fall $n = 2$ als weitere Verankerung der Induktion.

Hier gibt es genau zwei Permutationen: Die Identität, die alles festläßt, und die Vertauschung der beiden Elemente. Letzere ist eine Transposition, erstere kann wieder als leeres Produkt von Transpositionen betrachtet werden oder, falls man das nicht möchte, als Quadrat der Vertauschung, denn nach zweimaligem Vertauschen ist wieder alles beim alten.

Beim *Induktionsschritt* nehmen wir an, wir hätten den Satz für Permutationen $(n-1)$-elementiger Mengen bewiesen und betrachten nun eine Permutation

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} .$$

Für diese gibt es ein Element $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß $\pi(i) = n$ ist, denn $\pi$ ist ja bijektiv. Die Permutation

$$\pi' = \pi \circ (i\ n)$$

bildet $n$ ab auf

$$\pi'(n) = \big(\pi \circ (i\ n)\big)(n) = \pi\big((i\ n)(n)\big) = \pi(i) = n\,,$$

d.h. $n$ bleibt fest. Da $\pi'$ bijektiv ist, muß es daher auch die Menge $\{1, \dots, n-1\}$ auf sich selbst abbilden; wenn wir $n$ ignorieren, können wir $\pi'$ daher auch als eine Permutation von $\{1, \dots, n-1\}$ auffassen. Von der wissen wir, daß sie als Produkt

$$\pi' = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$$

von Transpositionen darstellbar ist. Wegen $\pi' = \pi \circ (i\ n)$ und weil Transpositionen zu sich selbst invers sind, ist damit auch

$$\pi = \pi' \circ (i\ n) = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r \circ (i\ n)$$

als Produkt von Transpositionen darstellbar, und damit ist der Satz einmal bewiesen.

Zum zweiten Beweis, auf Grundlage der Informatik, führt die Beobachtung, daß jeder gängige Sortieralgorithmus, der auf Vertauschungen von Elementen beruht (und das tut fast jeder) ein konstruktives Verfahren liefert, um Permutationen als Produkte von Transpositionen zu schreiben: Soll $\pi$ zerlegt werden, so sortiere man durch fortgesetztes Vertauschungen zweier Zahlen die Folge

$$\pi(1),\ \pi(2),\ \pi(3),\ \dots, \pi(n-1),\ \pi(n)$$

der Größe nach; die erste angewandte Transposition sei $\tau_1$, die letzte $\tau_n$.

Die sortierte Folge der $\pi(i)$ ist natürlich $1, \dots, n$ ist; daher für jedes $i$

$$(\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \pi)(i) = i\,,$$

d.h.

$$\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \pi = \text{Identität}\,.$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$, so folgt

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r\,,$$

denn

$$\begin{aligned}
&(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r) \circ (\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1)\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-1} \circ (\tau_r \circ \tau_r) \circ \tau_{r-1} \circ \cdots \circ \tau_1\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-2} \circ (\tau_{r-1} \circ \tau_{r-1}) \circ \tau_{r-2} \circ \cdots \circ \tau_1\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-3} \circ (\tau_{r-2} \circ \tau_{r-2}) \circ \tau_{r-3} \cdots \circ \tau_1\\
&= \cdots = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_2) \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_1 = \text{Identität}\,.
\end{aligned}$$

Also ist $\pi$ als Produkt der Transpositionen $\tau_1$ bis $\tau_r$ darstellbar. ■

Ein Leser, der mit den gebräuchlichen Sortierverfahren vertraut ist, wird unschwer erkennen, daß der „mathematische" Beweis ein Spezialfall des informatischen ist, in dem als Sortierverfahren ein relativ einfaches $O(n^2)$-Verfahren benutzt wurde (das allerdings zumindest für einstellige $n$ den meisten „besseren" Sortierverfahren überlegen sein dürfte). Die beiden Beweise unterscheiden sich also nicht sonderlich.

Die Anzahl $n$ der benötigten Vertauschungen hängt natürlich von der Vorgehensweise und der Effiziens des gewählten Sortierverfahrens ab;



die Darstellung von $\pi$ als Produkt von Transpositionen ist also alles andere als eindeutig. Da wir für die Determinantenberechnung vor allem wissen müssen, ob die Abzahl der Vertauschungen gerade oder ungerade ist, wollen wir uns als nächstes davon überzeugen, daß wenigstens dies, d.h. also die Parität der Anzahl $r$ der benötigten Transpositionen, eindeutig bestimmt ist: $r$ ist für gegebenes $\pi$ entweder *immer* gerade oder *immer* ungerade.

Dazu definieren wir für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ein Vorzeichen:

**Definition:** Das *Vorzeichen* der Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist die Zahl

$$\varepsilon(\pi) \underset{\text{def}}{=} \prod_{\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}\,,$$

wobei das Produkt über die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ genommen wird.

$\varepsilon(\pi)$ ist wirklich ein Vorzeichen, das heißt gleich $\pm 1$, denn

$$|\varepsilon(\pi)| = \frac{\prod\limits_{\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}} |\pi(j) - \pi(i)|}{\prod\limits_{\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}} |j - i|} = 1\,,$$

weil mit $\{i, j\}$ wegen der Bijektivität von $\pi$ auch $\{\pi(i), \pi(j)\}$ die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft, so daß im Zähler und Nenner bis auf Reihenfolge genau dieselben Faktoren stehen.

Für eine Transposition $\tau = (k\ \ell)$ ist

$$\frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \frac{j - i}{j - i} = 1 \quad \text{falls} \quad \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset\,,$$

da $(k\ \ell)$ alle Zahlen außer $k$ und $\ell$ festläßt. Die Zahlen $k$ und $\ell$ werden vertauscht, daher ist

$$\frac{\tau(k) - \tau(\ell)}{k - \ell} = \frac{\ell - k}{k - \ell} = -1\,.$$

Bleibt noch der Fall, daß eine der beiden Zahlen $i$ oder $j$ gleich $k$ oder $\ell$ ist; da wir zweielementige *Mengen* betrachten und $\{i, j\} = \{j, i\}$ ist, können wir vereinbaren, daß diese Zahl $i$ sein soll.

Ist $i = k$, so ist das Produkt der Terme für $\{k, j\}$ und $\{\ell, j\}$ gleich

$$\frac{\tau(k) - \tau(j)}{k - j} \cdot \frac{\tau(\ell) - \tau(j)}{\ell - j} = \frac{\ell - j}{k - j} \cdot \frac{k - j}{\ell - j} = +1\,;$$

und genau entsprechend kann man auch für $i = \ell$ argumentieren.

Bildet man daher das Produkt über alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, so erhält man $\varepsilon(\tau) = -1$ und damit das

**Lemma:** Das Vorzeichen einer Transposition ist $-1$. ■

Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen und der Transpositionsdarstellung einer Permutation ergibt sich aus

**Lemma:** Für zwei Permutationen $\pi, \pi' \in \mathfrak{S}_n$ ist

$$\varepsilon(\pi \circ \pi') = \varepsilon(\pi) \cdot \varepsilon(\pi')\,.$$

*Beweis:* Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\varepsilon(\pi \circ \pi') &= \prod_{\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{(\pi \circ \pi')(j) - (\pi \circ \pi')(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{\pi\bigl(\pi'(j)\bigr) - \pi\bigl(\pi'(i)\bigr)}{j - i}\,.\end{aligned}$$

Nach Erweiterung mit

$$\prod_{\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{\pi'(j) - \pi'(i)}{\pi'(j) - \pi'(i)}$$

und Umordnung wird dies zu

$$\varepsilon(\pi \circ \pi') = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\bigl(\pi'(j)\bigr) - \pi\bigl(\pi'(i)\bigr)}{\pi'(j) - \pi'(i)} \cdot \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi'(j) - \pi'(i)}{j - i}\,.$$

Das zweite dieser Produkte ist natürlich $\varepsilon(\pi')$, und das erste ist $\varepsilon(\pi)$, da mit $\{i, j\}$ auch $\{\pi'(i), \pi'(j)\}$ die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ durchläuft. ■



Sind nun

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s$$

zwei Darstellungen einer Permutation $\pi$ als Produkt von Transpositionen, so ist nach den gerade bewiesenen Lemmata einerseits

$$\varepsilon(\pi) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^r,$$

andererseits aber auch

$$\varepsilon(\pi) = \prod_{i=1}^{s} \varepsilon(\sigma_i) = (-1)^s,$$

also muß $(-1)^r = (-1)^s$ sein und damit $r, s$ entweder beide gerade oder beide ungerade.

**Definition:** Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt *gerade*, wenn sie als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ansonsten heißt sie *ungerade.*

Das Vorzeichen $\varepsilon(\pi)$ von $\pi$ ist also $+1$ für gerades $\pi$ und $-1$ für ungerades.

## e) Existenz von Determinanten

Nach diesem Einschub über Permutationen und Transpositionen haben wir das nötige Rüstzeug, um die Rechnung aus Abschnitt *c)* zu Ende zu führen:

Da die Determinante bei jeder Vertauschung zweier Elemente ihr Vorzeichen wechselt, folgt sofort aus den obigen Betrachtungen, daß für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt

$$\det\bigl(\vec{e}_{\pi(1)}, \ldots, \vec{e}_{\pi(n)}\bigr) = \begin{cases} +\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) & \text{falls } \pi \text{ ungerade} \end{cases},$$

d.h. $\det\bigl(\vec e_{\pi(1)},\dots,\vec e_{\pi(n)}\bigr) = \varepsilon(\pi)\cdot\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n)$. Wenn wir die Rechnung aus Abschnitt *b)* fortführen, erhalten wir daher

$$\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\cdot\det\bigl(\vec e_{\pi(1)},\dots,\vec e_{\pi(n)}\bigr)$$
$$= \left(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)\cdot\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr)\,.$$

Somit ist $\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr)$ eindeutig bestimmt bis auf den Wert von $\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr)$; falls es überhaupt Determinanten gibt, müssen sie also so aussehen. Wir definieren daher

**Definition:** Die Determinante von $n$ Vektoren

$$\vec v_1 = a_{11}\vec e_1+\cdots+a_{1n}\vec e_n,\quad \dots,\quad \vec v_n = a_{n1}\vec e_1+\cdots+a_{nn}\vec e_n$$

des $n$-dimensionalen Vektorraums $V$ bezüglich der Basis $\vec e_1,\dots,\vec e_n$ ist

$$\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\,.$$

Insbesondere ist also $\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n) = 1$.

**Satz:** Die so definierte Determinante hat die Eigenschaften (D1) bis (D3).

*Beweis:* Beginnen wir mit (D1), d.h. die Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn zwei der Argumente vertauscht werden. Vertauscht man etwa die Argumente $\vec v_i$ und $\vec v_j$, so werden anstelle der Summanden

$$\varepsilon(\pi)\,a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}$$

die Summanden

$$\varepsilon(\pi)\,b_{1\pi(1)}\cdots b_{j\pi(j)}\cdots b_{i\pi(i)}\cdots b_{n\pi(n)}$$

aufaddiert, wobei

$$b_{k\ell} = \begin{cases} a_{k\ell} & \text{falls } k\neq i,j\\ a_{j\ell} & \text{falls } k=i\\ a_{i\ell} & \text{falls } k=j\end{cases}$$



ist. Die Summanden sind also

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\pi)\,a_{1\pi(1)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}\\ &=\varepsilon(\pi)\,a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\\ &=\varepsilon(\pi)\,a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)}\end{aligned}$$

mit

$$\pi'(k) = \begin{cases}\pi(k) & \text{falls } k\neq i,j\\ \pi(j) & \text{falls } k=i\\ \pi(i) & \text{falls } k=j\,,\end{cases}$$

d.h. $\pi' = \pi\circ(i\ j)$. Als Produkt von Transpositionen geschrieben hat $\pi'$ daher einen Faktor mehr als $\pi$; falls $\pi$ ungerade war, ist also $\pi'$ gerade, und umgekehrt. Somit ist

$$\varepsilon(\pi') = -\varepsilon(\pi)\,,$$

und damit lassen sich die Summanden auch schreiben als

$$-\varepsilon(\pi')\,a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)}\,.$$

Summiert man über alle $\pi'\in\mathfrak{S}_n$, ist also

$$\begin{aligned}&\det(\vec v_1,\dots,\vec v_j,\dots,\vec v_i,\dots,\vec v_n)\\ &=\sum_{\pi'\in\mathfrak{S}_n}\bigl(-\varepsilon(\pi')\bigr)\,a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)}\\ &=-\sum_{\pi'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi')\,a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)}\\ &=-\det(\vec v_1,\dots,\vec v_i,\dots,\vec v_j,\dots,\vec v_n)\,,\end{aligned}$$

womit (D1) bewiesen wäre.

Eigenschaft (D2), die Linearität in jedem der Argumente, ist klar, denn jedes der Monome $a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}$ enthält *genau eine* Komponente des Vektors $\vec v_i$ und ist damit linear in $\vec v_i$.

Bleibt noch (D3), d.h. $\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr)$ soll genau dann verschwinden, wenn die $\vec v_i$ linear abhängig sind.

Sind zunächst die Vektoren $\vec v_1,\dots,\vec v_n$ linear abhängig, so läßt sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen schreiben; durch

Umordnen (wobei die Determinante nach der schon bewiesenen Eigenschaft (D1) höchstens ihr Vorzeichen ändert) können wir annehmen, daß dies etwa $\vec{v}_1$ sei; wir setzen

$$\vec{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\det\bigl(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\bigr) &= \det\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\right) \\ &\underset{(D2)}{=} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det\bigl(\vec{v}_i, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\bigr) \,.\end{aligned}$$

Im $i$-ten Summanden der letzten Summe tritt der Vektor $\vec{v}_i$ zweimal als Argument von det auf: Einmal an der ersten, und dann noch an der $i$-ten. Vertauscht man diese beiden (gleichen) Argumente, ändert sich natürlich nichts; andererseits haben wir aber bereits (D1) bewiesen, wonach sich beim Vertauschen irgend zweier Argumente das Vorzeichen ändert. Der $i$-te Summand hat also einen Wert $s_i$, für den $s_i = -s_i$ ist. Falls wir mit reellen Zahlen arbeiten, folgt hieraus natürlich sofort, daß alle $s_i$ verschwinden und somit auch ihre Summe.

Für beliebige Körper gilt das aber leider nicht: Aus $s_i = -s_i$ folgt, wenn wir auf beiden Seiten $s_i$ addieren, zunächst nur, daß

$$s_i + s_i = (1+1)s_i = 0$$

ist, und daraus folgt genau dann, daß auch $s_i = 0$ ist, wenn $1 + 1 \neq 0$ ist. Dies ist aber beispielweise in dem für die digitale Informationsverarbeitung wichtigen Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ nicht der Fall; wir müssen uns also mit Rücksicht auf diesen (und eine ganze Reihe anderer) Körper noch überlegen, daß wirklich immer

$$\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = 0$$

ist, wenn zwei der Argumente $\vec{v}_i$ übereinstimmen.



Dazu beachten wir, daß im Falle $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ auch für alle $\ell$ die Koeffizienten $a_{i\ell}$ und $a_{j\ell}$ übereinstimmen, d.h. in der Summe

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

ist stets

$$a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)} = a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \,.$$

Hier ist die rechte Seite gerade der Summand zur Permutation $\pi \circ (i\ j)$, die genau dann gerade ist, wenn $\pi$ ungerade ist, und umgekehrt. Also haben beide Terme verschiedenes Vorzeichen und heben sich gegenseitig weg; die Summe über alle Permutationen ist daher Null.

Somit verschwindet die Determinante unabhängig vom Grundkörper immer dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Nun seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig; für dieses Fall müssen wir zeigen, daß die Determinante *nicht* verschwindet. Wir wissen, daß für die Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$$\det\bigl(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\bigr) = 1 \neq 0$$

ist; außerdem wissen wir, daß $n$ beliebige linear unabhängige Vektoren eines $n$-dimensionalen Vektorraums eine Basis bilden.

Daher können wir die $\vec{e}_i$ als Linearkombinationen der $\vec{v}_j$ schreiben, etwa als

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \vec{v}_j \,.$$

Nun können wir die Rechnungen der letzten Paragraphen wörtlich wiederholen, nur daß dieses Mal $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ die Basisvektoren sind und $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Vektoren, für die wir det berechnen möchten. Wir wissen zwar noch nicht, daß $\det\bigl(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\bigr)$ nicht verschwindet, aber das haben wir in der dortigen Rechnung auch nie verwendet: Alles hing nur ab von den bereits bewiesenen Forderungen (D1) und (D2) und der ebenfalls schon bewiesenen Tatsache, daß det verschwindet, wenn zwei der Argumente gleich sind. Somit erhalten wir die Formel

$$\det\bigl(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\bigr) = \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) b_{1\pi(1)} \cdots b_{n\pi(n)}\right) \cdot \det\bigl(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\bigr) \,.$$

In dieser Gleichung steht links die Zahl eins, also kann keiner der beiden Faktoren auf der rechten Seite verschwinden; insbesondere ist $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \neq 0$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

Fassen wir zusammen, was wir bislang in diesem Paragraphen gemacht haben:

- Wir haben anhand des Beispiels von Determinanten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ drei zentrale Forderungen an eine allgemeine Determinante aufgestellt.
- Unter der Annahme, daß es Funktionen gibt, die diese drei Forderungen erfüllen, haben wir ausgerechnet, wie solche Funktionen aussehen müssen; inbsbesondere haben wir gesehen, daß sie durch ihren Wert auf den Vektoren einer Basis eindeutig bestimmt sind.
- Dann haben wir die so erhaltene explizite Formel als *Definition* einer allgemeinen Determinanten genommen und gezeigt, daß die so definierte Funktion tatsächlich die drei Forderungen erfüllt.

Insgesamt haben wir also gesehen, daß es Funktionen gibt, die den drei Forderungen (D1) bis (D3) genügen und daß solche Funktionen bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt sind.

## f) Die Determinante einer Matrix

**Definition:** Unter der Determinante einer Matrix $A \in k^{n \times n}$ verstehen wir die Determinante ihrer Spaltenvektoren; ist also

$$A = (a_{ij}) \quad \text{und} \quad \vec{v}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

so ist

$$\det A \underset{\text{def}}{=} \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n).$$



Wir schreiben auch kurz

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um etwas Übung im Umgang mit Determinanten zu bekommen, wollen wir dies für $n = 1$ und die beiden bereits bekannten Fälle $n = 2$ und $n = 3$ noch einmal explizit ausrechnen – auch wenn wir bereits wissen, was herauskommen muß.

Der Fall $n = 1$ einer $1 \times 1$-Matrix ist völlig uninteressant: Die einzige Permutation einer einelementigen Menge ist die Identität, die für jedes $n$ gerade ist; für $A = (a) \in k^{1\times 1}$ ist also $\det A = a$. Die Schreibweise $\det A = |a|$ ist hier irreführend, da es zumindest für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu Verwechslungen mit der Betragsfunktion kommen kann. Da Determinanten von $1 \times 1$-Matrizen jedoch niemanden interessieren, ist dies nicht weiter schlimm.

Für $n = 2$ gibt es zwei Permutationen: Die (gerade) Identität und die (ungerade) Transposition (1 2). Nach Definition der (allgemeinen) Determinanten ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

wie erwartet.

Für $n = 3$ gibt es bereits $3! = 6$ Permutationen, darunter natürlich die (gerade) Identität.

Jede weitere Permutation kann höchstens ein Element festlassen, denn würde sie zwei festlassen, müßte wegen der Bijektivität der Abbildung auch das dritte auf sich selbst abgebildet werden, wir hätten also die Identität.

Falls ein Element festgehalten wird, bleibt einer nichtidentischen Permutation daher nichts anderes übrig, als die beiden anderen zu vertauschen; dies führt auf die drei (ungeraden) Transpositionen (2 3), (1 3) und (1 2).

Falls kein Element auf sich selbst abgebildet wird, muß die Eins entweder auf 2 oder auf 3 abgebildet werden. Im ersten Fall geht dann 2 auf 3, denn sonst müßte zwei entweder festbleiben oder wir hätten die Transposition (1 2), die drei auf sich selbst abbildet. Wegen der Bijektivität der Abbildung gibt es dann keine andere Möglichkeit als daß drei auf eins abgebildet wird; wir haben also die zyklische Vertauschung

$$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1 .$$

Diese Permutation ist gerade, denn sie läßt sich beispielsweise als Produkt (1 3)(1 2) zweier Transpositionen schreiben: Wenden wir dieses Produkt an auf 1, so wird die Eins zunächst von (1 2) auf zwei abgebildet, und zwei bleibt fest unter (1 3), so daß insgesamt eins auf zwei abgebildet wird, wie verlangt.

Zwei wird von (1 2) auf die Eins abgebildet, und die wiederum von (1 3) auf drei, also haben wir auch hier insgesamt das richtige Ergebnis. Drei schließlich kann dann wegen der Bijektivität von (1 3)(1 2) nur auf eins abgebildet werden, was man auch schnell direkt sieht, denn (1 2) läßt die Drei unverändert, während (1 3) sie auf eins abbildet.

Die noch verbleibende Permutation bildet eins auf drei und daher drei auf zwei ab, sie ist also die zyklische Vertauschung

$$1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \quad \text{oder} \quad 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 3 ,$$

d.h. die Umkehrabbildung zur gerade betrachteten Permutation. Daher ist sie als Produkt von Transpositionen gleich

$$\big((1\ 2)(1\ 3)\big)^{-1} = (1\ 3)^{-1}(1\ 2)^{-1} = (1\ 3)(1\ 2)$$

und somit auch gerade.

Zur Berechnung der Determinanten einer $3 \times 3$-Matrix $(a_{ij})$ beginnen wir mit den geraden Permutationen: Die Identität liefert den Term $a_{11}a_{22}a_{33}$, d.h. das Produkt der drei Diagonalelemente, die zyklische Vertauschung $1 \to 2 \to 3 \to 1$ liefert das Produkt $a_{12}a_{23}a_{31}$, und ihr Inverses $a_{13}a_{21}a_{32}$.



Die drei Transpositionen führen auf die negativ zu nehmenden Produkte $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$ und $a_{12}a_{21}a_{33}$; insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} , \end{aligned}$$

genau wie wir es in Abschnitt *b)* über das Spatprodukt berechnet hatten und uns aufgrund der SARRUSschen Regel leicht merken können.

Für die Determinanten von $4 \times 4$-Matrizen gibt es keine entsprechende Regel mehr. Da nun bereits $4! = 24$ Summanden berücksichtigt werden müssen, eignet sich die Formel aus der Definition der Determinanten nicht mehr gut zur Berechnung, von noch größeren Matrizen ganz zu schweigen: Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist $\log n! \approx n \log n$, d.h. die Anzahl $n!$ der Summanden wächst mit größer werdendem $n$ noch schneller als die Exponentialfunktion.

Wir werden im folgenden daher auf Verfahren hinarbeiten, die es erlauben, auch größere Determinanten mit vertretbarem Aufwand zu berechnen.

Wir kennen schon einige Rechenregeln für Determinanten als Funktionen von $n$ Vektoren, beispielsweise die Forderungen (D1) bis (D3), aus denen wir die Determinantendefinition hergeleitet haben oder auch die gerade angewandte Regel

$$\begin{aligned} &\det\big(\vec v_1, \ldots, \vec v_i + \lambda \vec v_j, \ldots, \vec v_n\big) \\ &= \det\big(\vec v_1, \ldots, \vec v_i, \ldots, \vec v_n\big) + \lambda \det\big(\vec v_1, \ldots, \vec v_j, \ldots, \vec v_n\big) \\ &= \det\big(\vec v_1, \ldots, \vec v_i, \ldots, \vec v_n\big) . \end{aligned}$$

In diesem Abschnitt soll es nun um Rechenregeln für Determinanten von Matritzen gehen.

Am wichtigsten ist der *Multiplikationssatz:*

**Satz:** *a)* Für zwei Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ ist

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B .$$

*b)* Für eine invertierbare Matrix $A \in k^{n\times n}$ ist

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} .$$

*Beweis: a)* Die Determinante von $AB$ ist die Determinante der Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von $AB$, die von $B$ ist gleich der Determinante der Spaltenvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ von $B$, und nach Definition der Matrizenmultiplikation ist mit $A = (a_{ij})$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{b}_j .$$

Damit sind wir in der Situation der Abschnitte *b)* und *d)* (wobei hier die $\vec{b}_j$ die Rolle der dortigen $\vec{e}_j$ übernehmen) und können aufgrund der dortigen Rechnungen aus den Eigenschaften (D1) bis (D3) folgern, daß

$$\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \left(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\right) \cdot \det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$$

ist. Das ist aber genau die Formel

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) .$$

*b)* Für eine invertierbare Matrix $A$ ist $A \cdot A^{-1} = E$ die Einheitsmatrix, und deren Determinante ist gleich der Determinante der Basisvektoren in ihrer natürlichen Reihenfolge, also 1. Daher ist nach Teil *a)*

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det E = 1 ,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Der Multiplikationssatz läßt sich in ein Berechnungsverfahren für Determinanten übersetzen: Falls wir die LR-Zerlegung $LA = R$ der Matrix $A$ kennen, sagt uns der Satz, daß

$$\det A = \frac{\det R}{\det L}$$

ist. Die Determinanten von $L$ und $R$ lassen sich leicht ausrechnen nach dem folgenden



**Lemma:** Die Determinante einer (unteren oder oberen) Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

*Beweis:* $A = (a_{ij})$ sei eine Dreiecksmatrix. Wie üblich ist

$$\det A = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} .$$

Nun ist aber für eine untere *bzw.* obere Dreiecksmatrix $a_{ij} = 0$ falls $i < j$ *bzw.* $i > j$ ist. Da Permutationen bijektive Abbildungen sind, muß es für jede Permutation außer der Identität mindestens ein $i$ geben mit $\pi(i) < i$ und mindestens ein $j$ mit $\pi(j) > j$, d.h. das Produkt $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ enthält für jede nichtidentische Permutation mindestens einen Faktor Null. Damit kann höchstens die Identität einen von Null verschiedenen Beitrag zur Summe liefern; da sie Vorzeichen +1 hat ist also

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

das Produkt der Diagonalelemente von $A$. ■

So wie wir die LR-Zerlegung definiert haben, ist $L$ eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale und $R$ eine beliebige obere Dreiecksmatrix. Also ist $\det L = 1$, die Determinante von $R$ ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente von $R$, und damit ist auch

$$\det A = \text{Produkt der Diagonalelemente von } R .$$

Zumindest für große $n$ ermöglicht dies eine erheblich effizientere Berechnung von Determinanten als die definierende Formel: Der Aufwand für eine LR-Zerlegung ist ungefähr proportional zu $n^3$, was für große $n$ weitaus günstiger ist als der überexponentiell steigende Aufwand proportional $n \cdot n!$ für die Summe aus der definierenden Formel.

Grundsätzlich läßt sich eine Determinante umso einfacher ausrechnen, je mehr Nullen sie enthält und (vor allem, wenn man ohne Hilfsmittel rechnet) je einfacher die Zahlen sind, die darin vorkommen. Im folgenden sollen daher einige Regeln zusammengestellt werden, mit denen sich Determinanten auf eine angenehmere Form bringen lassen.

*Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert:* Die Determinante einer