die inversen Matrizen, und Multiplikation zeigt, daß

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}B^{-1}$$

ist. Insbesondere unterscheidet sich auch

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

deutlich von der Einheitsmatrix.

d) Beispiel eines Basiswechsels

In den meisten (endlichdimensionalen) Vektorräumen, die wir bislang betrachtet hatten, gab es offensichtliche Basen wie etwa die Koordinateneinheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ oder die reinen Potenzen bei Vektorräumen von Polynomen. Sowohl in vielen Anwendungen der Mathematik als auch innerhalb der Mathematik ist es aber selbst in diesen Fällen oft nützlich, mit anderen Basen zu rechnen, und es gibt auch Vektorräume, bei denen es keine irgendwie ausgezeichnete Basis gibt.

Als Beispiel dafür betrachten wir das Problem, Farben quantitativ zu charakterisieren: Physikalisch gesehen hängen Farben mit den verschiedenen Wellenlängen des sichtbaren Lichts zusammen, eine Farbe müßte also eigentlich durch eine Funktion auf dem Intervall von etwa 380 bis etwa 780 nm beschrieben werden, wobei keineswegs nur stetige Funktionen in Betracht kommen.

Nun werden Farben aber nur selten mit dem Spektrometer betrachtet; was wirklich interessiert ist der Eindruck auf das menschliche Auge. Dieses hat vier Arten von Photorezeptoren: Die sehr empfindlichen Stäbchen, die nur bei schwachem Licht eine Rolle spielen und die auch nur Helligkeitsinformationen liefern können, sowie drei Arten von weniger lichtempfindlichen Zäpfchen, k, ℓ und m, die bei gutem Licht ein Bild mit Farbinformation liefern, da jede Art ihre eigene spektrale Empfindlichkeitskurve hat. Klassische wie auch digitale Photographie sowie Farbdarstellungen auf Fernseh- und Computermonitoren beruhen allesamt darauf, daß dem Auge etwas vorgesetzt wird, was die k, ℓ und m-Zäpfchen zur gleichen Reaktion veranlaßt wie das „echte“ Farbsignal.

Damit reicht es aus, Farben als Elemente eines dreidimensionalen Raums zu beschreiben. Da sich die Empfindlichkeitsbereiche insbesondere der ℓ- und der m-Zäpfchen stark überlappen, wäre es allerdings weder sinnvoll noch sonderlich praktikabel, eine Basis über die Ausgabewerte der drei Arten von Zäpfchen zu definieren. Stattdessen werden je nach Hauptanwendungsziel mehrere Farbmodelle betrachtet, die ausgehend von den unterschiedlichsten Ansätzen allesamt denselben dreidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum beschreiben. Wir wollen uns die beiden einfachsten etwas genauer anschauen.

Am bekanntesten ist wohl das RGB-Modell, das Farben aus den drei Grundfarben Rot, Grün und Blau kombiniert. Basis des Vektorraums sind hierbei also drei Vektoren $\vec{r}, \vec{g}$ und $\vec{b}$, die einem Rot, Grün *bzw.* Blau einer vorgegebenen Frequenz und Intensität entsprechen, und alle anderen Farben werden als Linearkombinationen

$$R\vec{r} + G\vec{g} + B\vec{b}$$

dargestellt. Diese Darstellung ist insbesondere gut geeignet für die Farbdarstellung auf einem Monitor oder auch Fernsehschirm, wo Farben in genau dieser Weise erzeugt werden. Bei digitalen Bildern betrachtet man i.a. nur Koeffizienten R, G, B aus dem Intervall [0, 1], so daß gewisse Grenzhelligkeiten nicht überschritten werden können. Bei der Darstellung mit einer Genauigkeit von acht Bit betrachtet man oft auch das 255-fache der entsprechenden Werte, gerundet zur nächsten ganzen Zahl.

Bei anderen Farbmodellen sieht man nicht so sehr auf die *Erzeugung* der Farben am Bildschirm, sondern auf deren Eigenschaften, wie sie ein menschlicher Betrachter wahrnimmt: Die Ausgabeimpulse der Zäpfchen werden noch im Sehapparat sofort weiterverarbeitet, und was wir bewußt zur Kenntnis nehmen, sind definitiv nicht die R-, G- und B-Anteile der Farben, sondern eher Helligkeiten, Farbsättigungen und ähnliche Eigenschaften.

Eine für die digitale Speicherung und Übermittlung interessante Tatsache ist, daß wir Helligkeiten viel feiner unterscheiden und viel höher auflösen können als Farbnuancen. Es liegt daher nahe, eine Basis zu wählen, in der auch die Gesamthelligkeit als Komponente auftritt, wobei diese Komponente entweder mit höherer Geauigkeit digitalisiert wird als die beiden anderen oder (häufiger) nur diese Komponente für *jedes* Pixel gespeichert wird, die beiden anderen aber nur für jedes zweite Pixel oder gar nur einmal pro Quadrat aus 2×2 Pixel. Die Wahl der Helligkeit als Basiskomponente hat auch den Vorteil, daß man dann in einfacher Weise diese Komponente für Schwarz-Weiß-Versionen der Bilder verwenden kann, was zum Beispiel beim Fernsehen eine wichtige Rolle spielt.

Wenn wir die Helligkeit als eine Basiskomponente wählen, stehen für die eigentliche chromatische Information nur noch zwei Basisvektoren zur Verfügung; diese können entweder aus zwei Farbanteilen des RGB-Systems abgeleitet werden oder (was für die Gestaltung photorealistischer Bilder gern angewandt wird) aus einer weiteren achromatischen Komponente wie etwa der Farbsättigung und nur *einer* chromatischen Komponente.

Bei den drei derzeit gebräuchlichen Fernsehstandards PAL, SECAM und NTSC sowie auch beim HDTV und beim JPEG-Format für digitale Bilder geht man den ersten Weg: Der erste Basisvektor $\vec{y}$ beschreibt die Helligkeit oder *Luminanz*, die beiden weiteren Vektoren sind gewichtete Differenzen zwischen dieser Helligkeit und dem Rot- oder Blauanteil des Farbvektors. Die Gewichte unterscheiden sich dabei in den einzelnen Fällen; da für die Hörer dieser Vorlesung das JPEG-Format interessanter sein dürfte als Fernsehstandards, betrachten wir das dort verwendete YCbCr-Modell.

Die Helligkeit ist, wie in allen diesen Systemem, als gewichtetes Mittel der drei Farbanteile definiert; die Gewichte L_R, L_G und $L_B \in (0,\ 1)$ bezeichnet man als *Lumared*, *Lumagreen* und *Lumablue*. Mit diesen Bezeichnungen ist die Helligkeit

$$Y = L_R R + L_G G + L_B B \quad \text{mit} \quad L_R + L_G + L_B = 1\,;$$

Standardwerte sind

$$L_R = \frac{299}{1000}, \quad L_G = \frac{587}{1000} \quad \text{und} \quad L_B = \frac{114}{1000}\,.$$

Die beiden Chrominanzen sind festgelegt durch

$$C_b = \frac{B-Y}{2-2L_B} \quad \text{und} \quad C_r = \frac{R-Y}{2-2L_R}\,.$$

Damit haben wir eine neue Basis $\{\vec{y}, \vec{c}_b, \vec{c}_r\}$, mittels derer wir dieselben Farben beschreiben wie bezüglich der Basis $\{\vec{r}, \vec{g}, \vec{b}\}$.

Ganz offensichtlich ist es wichtig, zwischen den beiden Basen hin- und herrechnen zu können, denn schließlich werden auch JPEG-Bilder auf RGB-Monitoren betrachtet, und CCD Chips in Digitalkameras messen zunächst einmal RGB-Komponenten, aus denen dann oft ein JPEG-Bild erzeugt wird.

Im vorliegenden Fall ist es einfach, konkrete Formeln zu finden:

$$\begin{aligned} Y &= L_R R + L_G G + L_B B\,, \\ C_b &= \frac{B-Y}{2-2L_B} = -\frac{L_R}{2-2L_B}\cdot R - \frac{L_G}{2-2L_B}\cdot G + \frac{1}{2}\cdot B\,, \\ C_r &= \frac{R-Y}{2-2L_R} = \frac{1}{2}\cdot R - \frac{L_G}{2-2L_R}\cdot G - \frac{L_B}{2-2L_R}\cdot B\,. \end{aligned}$$

Auch die Umkehrung läßt sich leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} R &= Y + (2-2L_R)C_r\,, \\ B &= Y + (2-2L_B)C_b \qquad \text{und} \\ G &= \frac{Y - L_R R - L_B B}{L_G} \\ &= \frac{(1-L_R-L_B)Y - L_B(2-2L_B)C_b - L_R(2-2L_R)C_r}{L_G} \\ &= Y - \frac{L_B(2-2L_B)}{L_G}C_b - \frac{L_R(2-2L_R)}{L_G}C_r\,, \end{aligned}$$

denn $1 - L_R - L_B = L_G$. Dies können wir auch mit Matrizen formulieren:

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_R & L_G & L_B \\ \frac{-L_R}{2-2L_B} & \frac{-L_G}{2-2L_B} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-L_G}{2-2L_R} & \frac{-L_B}{2-2L_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-2L_R \\ 1 & -\frac{L_B(2-2L_B)}{L_G} & -\frac{L_R(2-2L_R)}{L_G} \\ 1 & 2-2L_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix}\,.$$

Der Übergang zwischen den beiden Basen kann also jeweils als Multiplikation mit einer Matrix interpretiert werden, und natürlich sind die beiden zugehörigen Matrizen invers zueinander.

Wenn wir die erste der beiden Matrizen mit A bezeichnen, so sind die Spalten von A die Bilder der Einheitsvektoren des RGB-Systems, umgerechnet ins YCbCr-System; wir erhalten also die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= L_R\vec{y} - \frac{L_R}{2-2L_B}\vec{c}_b + \frac{1}{2}\vec{c}_r \\
\vec{g} &= L_G\vec{y} - \frac{L_G}{2-2L_B}\vec{c}_b - \frac{L_G}{2-2L_R}\vec{c}_r \quad \text{und} \\
\vec{b} &= L_B\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{c}_b - \frac{L_B}{2-2L_R}\vec{c}_r\,.
\end{aligned}$$

Entsprechend sind die Spalten von A^{-1} die Bilder der Einheitsvektoren des YCbCr-Systems, umgerechnet ins RGB-System, d.h.

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \vec{r} + \vec{g} + \vec{b}, \\
\vec{c}_b &= -\frac{2-2L_B}{L_G}\vec{g} + (2-2L_B)\vec{b} \quad \textit{und} \\
\vec{c}_r &= (2-2L_R)\vec{r} - \frac{2-2L_B}{L_G}\vec{g}\,.
\end{aligned}$$

Man beachte die Unterschiede zwischen der Darstellung der Basisvektoren in der jeweils anderen Basis und den Umrechnungsformeln für die Koeffizienten: Beim Umrechnen der RGB-Werte in YCbCr-Werte haben wir als Koeffizienten der einzelnen Gleichungen die *Zeilen* von A; die Basisvektoren $\vec{r}, \vec{g}, \vec{b}$ selbst sind aber im YCbCr-System ausgedrückt durch die *Spalten* der *inversen* Matrix A^{-1}.

Zur Verdeutlichung seien die Gleichungen nochmals angegeben mit numerischen Koeffizienten, näherungsweise berechnet für die Standardwerte von L_R, L_G und L_B: Damit ist

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2990 & 0{,}5870 & 0{,}1140 \\ -0{,}1687 & -0{,}3313 & 0{,}5000 \\ 0{,}5000 & -0{,}4187 & -0{,}0813 \end{pmatrix}$$

und

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}4020 \\ 1 & -0{,}3441 & -0{,}7141 \\ 1 & 1{,}7720 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

also erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
Y &= 0{,}2990\,R + 0{,}5870\,G + 0{,}1140\,B \\
Cb &= -0{,}1687\,R - 0{,}3313\,G + 0{,}5000\,B \\
Cr &= 0{,}5000\,R - 0{,}4187\,G - 0{,}08131\,B
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= 0{,}2990\,\vec{y} - 0{,}1687\,\vec{c}_b + 0{,}5000\,\vec{c}_r \\
\vec{g} &= 0{,}5870\,\vec{y} - 0{,}3313\,\vec{c}_b - 0{,}4187\,\vec{c}_r \\
\vec{b} &= 0{,}1140\,\vec{y} + 0{,}5000\,\vec{c}_b - 0{,}08131\,\vec{c}_r\,.
\end{aligned}$$

Entsprechend liefern Zeilen und Spalten von A^{-1} die Beziehungen

$$\begin{aligned}
R &= Y + 1{,}402\,Cr \\
G &= Y - 0{,}3441\,Cb - 0{,}7141\,Cr \\
B &= Y + 1{,}772\,Cb
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \vec{r} + \vec{g} + \vec{b} \\
\vec{c}_b &= -0{,}3441\,\vec{g} + 10{,}772\,\vec{b} \\
\vec{c}_r &= 1{,}402\,\vec{r} - 0{,}7141\,\vec{g}\,.
\end{aligned}$$

e) Der allgemeine Fall

Gehen wir über zur allgemeinen Situation!

Wir gehen aus von einen n-dimensionalen k-Vektorraum V und betrachten darin zwei Basen

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}\,.$$

Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, lassen sich die Vektoren $\vec{c}_i$ als Linearkombinationen

$$\vec{c}_i = a_{i1}\vec{b}_1 + \cdots + a_{in}\vec{b}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{b}_j$$

der $\vec{b}_j$ schreiben; entsprechen lassen sich natürlich auch die $\vec{b}_j$ als Linearkombinationen

$$\vec{b}_j = m_{j1}\vec{c}_1 + \cdots + m_{jn}\vec{c}_n = \sum_{\ell=1}^{n} m_{j\ell}\vec{c}_\ell$$

schreiben. Dies können wir in die Darstellung von $\vec{c}_i$ einsetzen und erhalten

$$\vec{c}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{b}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\ell=1}^{n} m_{j\ell}\vec{c}_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_{j\ell} \right) \vec{c}_\ell \,.$$

Da $\mathcal{C}$ eine Basis ist, bezüglich derer $\vec{c}_i$ die eindeutige Basisdarstellung

$$\vec{c}_i = 1 \cdot \vec{c}_i$$

hat, folgt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \ell \\ 0 & \text{falls } i \neq \ell \end{cases} .$$

Fassen wir die a_{ij} zu einer Matrix A zusammen und die m_{ij} zu einer Matrix M, ist also $AM = E$, d.h. die beiden Matrizen sind invers zueinander (was eigentlich niemanden erstaunen sollte). Formal können wir dies schreiben als

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{pmatrix} ,$$

wobei die $\vec{b}_j$ und $\vec{c}_i$ bei der Auswertung dieser Formel nur als Symbole zu betrachten sind: Wir wollen nicht wirklich einen Vektor von Vektoren definieren, sondernd diese Formel einfach als kompakte Merkregel für den Zusammenhang zwischen den beiden Basen betrachten.

Beim konkreten Rechnen in Vektorräumen geht es nicht so sehr um die Basisvektoren selbst, sondern um die Koeffizienten der Basisdarstellung; sei also der Vektor

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n = w_1\vec{c}_1 + \cdots + w_n\vec{c}_n$$

bezüglich beider Basis dargestellt; wir suchen einen Zusammenhang zwischen den v_j und den w_i.

Mit der obigen Matrix $M = (m_{ij})$ ausgedrückt ist

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j\vec{b}_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} m_{ji}\vec{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j m_{ji} \right) \vec{c}_i \,,$$

also folgt wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j m_{ji} = \sum_{i=1}^{n} m_{ji} v_j \,.$$

Letzteres läßt sich leider nicht als Produkt von M mit dem Spaltenvektor der v_j schreiben: Die Indizes von m_{ji} haben die falsche Reihenfolge. Da die Formel trotzdem richtig und nützlich ist, definieren wir eine neue Matrix, die aus der alten durch Vertauschung der Indizes, d.h. also von Zeilen und Spalten, entsteht:

Definition: Die *transponierte* Matrix $N = {}^tM$ zur einer Matrix $M = (m_{ij})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots m}} \in k^{n\times m}$ ist jene Matrix $N = (n_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}} \in k^{m\times n}$ mit $n_{ij} = m_{ji}$ für alle i, j.

Somit braucht man zur Umrechnung der Koeffizienten ineinander also die transponierte Matrix zu $M = A^{-1}$. Diese Matrix bezeichnen wir als die *Matrix des Basiswechsels;* sie wird auch gelegentlich also die zu A *kontragrediente* Matrix bezeichnet. Für sie gilt:

Satz: Sind $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ und $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ zwei Basen eines n-dimensionalen k-Vektorraums und ist

$$\vec{c}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{b}_j \quad \text{mit} \quad A = (a_{ij}) \in k^{n\times n} ,$$

so berechnen sich für

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n = w_1\vec{c}_1 + \cdots + w_n\vec{c}_n$$

die Koeffizienten w_i der Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{C}$ aus den v_j nach der Formel

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = {}^t\!\left(A^{-1}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ;$$

die Matrix des Basiswechsels ist also ${}^t\!\left(A^{-1}\right)$.

■

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Im Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sei der Untervektorraum U erzeugt von den beiden Funktionen e^x und e^{-x}, die wir zur Basis $\mathcal{B}$ von U zusammenfassen. Eine weitere Basis $\mathcal{C}$ von U bestehe aus den Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$. Dann ist

$$\sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} ,$$

die Matrix A, mittels derer wir $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{B}$ ausdrücken, ist also

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Die Berechnung der inversen Matrix ist hier nicht schwierig; man überzeugt sich leicht, daß gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad {}^t\!\left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit kennen wir die Matrix des Basiswechsels; ihr Produkt mit einem Koeffizientenvektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ ist

$${}^t\!\left(A^{-1}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} .$$

Also sollte gelten

$$ae^x + ae^{-x} = (a-b)\sinh x + (a+b)\cosh x ,$$

was man in der Tat leicht nachrechnet.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß oben in ${}^t\!\left(A^{-1}\right)$ die Klammern überflüssig waren; genauer gilt

Lemma: Für $A \in k^{n\times m}$ und $B \in k^{m\times p}$ ist ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ und ${}^t\!\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$.

Beweis: Mit $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{j\ell})$ hat AB an der Stelle $i\ell$ den Eintrag $\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{j\ell}$, und ihre Transponierte hat denselben Eintrag an der Stelle ℓi.

${}^tB$ hat an der Stelle ℓj den Eintrag $b_{j\ell}$ und ${}^tA$ hat an der Stelle ji den Eintrag a_{ij}, das Produkt ${}^tB\,{}^tA$ hat somit an der Stelle ℓi den Eintrag $\sum_{j=1}^m b_{j\ell}a_{ij}$, was wegen der Kommutativität der Multiplikation in k mit dem oben berechneten Ausdruck übereinstimmt.

Damit ist die erste Formel bewiesen. Wenden wir sie an auf $B = A^{-1}$, so folgt die Beziehung

$${}^t\!\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^t\!\left(AA^{-1}\right) = {}^tE = E ,$$

die beiden Matrizen sind also invers zueinander.

■

Als letztes Thema im Zusammenhang mit Basiswechseln wollen wir uns überlegen, wie sich die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung unter Basiswechseln verhält.

Wir betrachten also eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$; dabei sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, und W sei ein m-dimensionaler. In jedem der beiden Vektorräume seien zwei Basen gegeben; in V seien dies

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\} ,$$

in W seien es

$$\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_m\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m\} .$$

Um nicht ganz die Übersicht zu verlieren, ordnen wir jedem Vektor

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n = w_1\vec{c}_1 + \cdots + w_n\vec{c}_n$$

aus V die beiden Spaltenvektoren

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

aus k^n zu; entsprechend haben wir für jeden Vektor $\vec{w} \in W$ zwei Vektoren $\vec{w}_{\mathcal{D}}$ und $\vec{w}_{\mathcal{E}}$ aus k^m.

Die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{D}$ von W hat dann die Eigenschaft, daß

$$\varphi(\vec{v})_{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\vec{v}_{\mathcal{B}}$$

ist; für die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{C}$ von V und $\mathcal{E}$ von W gilt entsprechend

$$\varphi(\vec{v})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}\vec{v}_{\mathcal{C}} .$$

Für den Übergang von einer Basis zur anderen rechnen wir der Einfachheit halber nicht mit der zu Beginn dieses Abschnitts betrachteten Matrix, die die Basisvektoren durcheinander ausdrückt, sondern gleich mit der Matrix des Basiswechsels; die Matrizen $A \in k^{n\times n}$ und $B \in k^{m\times m}$ seien also so gewählt, daß für Vektoren $\vec{v} \in V$ und $\vec{w} \in W$ gilt

$$\vec{v}_{\mathcal{C}} = A\vec{v}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \vec{w}_{\mathcal{E}} = B\vec{w}_{\mathcal{D}} .$$

Dann ist

$$\varphi(\vec{v})_{\mathcal{E}} = B\varphi(\vec{v})_{\mathcal{D}} = BM_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\vec{v}_{\mathcal{B}} = BM_{\mathcal{B},\mathcal{D}}A^{-1}\vec{v}_{\mathcal{C}} ,$$

d.h.

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{E}} = BM_{\mathcal{B},\mathcal{D}}A^{-1} .$$

Im nächsten Semester werden wir vor allen den Fall $V = W$ oft benötigen; hier wählt man zweckmäßigerweise $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{C} = \mathcal{E}$. Dann ist auch $A = B$ und die obige Formel vereinfacht sich zu

$$M_{\mathcal{C}} = AM_{\mathcal{B}}A^{-1} ,$$

wobei wir hier in $M_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ den zweiten Index natürlich weglassen.

Betrachten wir als Beispiel die Differentiation im von e^x und e^{-x} erzeugten Vektorraum; ihre Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis $\mathcal{B}$ ist

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix des Basiswechsels Basis $\mathcal{C}$ aus $\sinh x$ und $\cosh x$ ist, wie wir oben gesehen haben,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und

$$AM_{\mathcal{B}}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ganz in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die Differentation $\sinh x$ zu $\cosh x$ macht und umgekehrt.

f) Die LR-Zerlegung einer Matrix

Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer invertierbaren Matrix A läßt sich zumindest formal sehr leicht auflösen: Durch Multiplikation mit A^{-1} folgt, daß $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ ist.

Für ein einziges lineares Gleichungssystem ist diese Formel nicht sonderlich interessant, denn der Aufwand zur Berechnung von A^{-1} ist größer als der zur direkten Lösung des Gleichungssystems. Hat man aber viele lineare Gleichungssysteme, die sich nur durch ihre rechte Seiten unterscheiden, wie dies zum Beispiel bei linearen Steuerungsproblemen der Fall ist. so kann man sehr viel Zeit sparen, wenn man zunächst ein für alle Mal die inverse Matrix berechnet und dann die einzelnen Gleichungssysteme für den Preis einer Matrix-Vektor-Multiplikation lösen kann.

Falls A nicht invertierbar ist, falls man also beispielsweise eine Steuerung mit Redundanz hat, kann man nicht so vorgehen. Hier liefert die LR-Zerlegung der Matrix A ein Verfahren zur effizienten Lösung linearer Gleichungssysteme, die sich nur in ihren rechten Seiten unterscheiden.

Die Grundidee der LR-Zerlegung ist dieselbe wie die zur Berechnung der inversen Matrix: Wie wenden den GAUSS-Algorithmus simultan an auf mehrere rechte Seiten.

Um die Struktur der entstehenden Zerlegung besser zu verstehen, betrachten wir den wesentlichen Schritt des GAUSS-Algorithmus, das Addieren von Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen, als Matrizenmultiplikation: Ist

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots 1 \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (j, i) mit $i < j$ eine Eins hat und sonst lauter Nullen, so ist für eine beliebige $n \times n$-Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ das

Produkt

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gleich einer Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur aus Nullzeilen besteht. Dies folgt entweder relativ schnell durch Ausmultiplizieren, oder aber – besser – durch Betrachtung der zugehörigen linearen Abbildungen: E_{ij} ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von E_{ij}; dies ist für $\nu \neq i$ der Nullvektor, und für $\nu = i$ ist es der j-te Einheitsvektor. Die lineare Abbildung zur Abbildungsmatrix E_{ij} ist also

$$\varphi_{ij}: k^n \to k^n; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i \cdot \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

A ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung φ, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von A, der wiederum von φ_{ij} auf $a_{i\nu}\vec{e}_j$ abgebildet wird. Die Abbildungsmatrix von $\varphi_{ij} \circ \varphi$ ist daher jene Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur Nullzeilen enthält.

Für die Matrix $L_1 = cE_{ij} + E$, die an der Stelle (j, i) eine Konstante c stehen hat, in der Hauptdiagonalen lauter Einser und sonst nur Nullen,

ist dementsprechend

$$L_1A = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & a_{(j-1)2} & \dots & a_{(j-1)m} \\ ca_{i1} + a_{j1} & ca_{i2} + a_{j2} & \dots & ca_{im} + a_{jm} \\ a_{(j+1)1} & a_{(j+1)2} & \dots & a_{(j+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

gerade jene Matrix, die aus A entsteht, wenn man das c-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert, so wie man es bei der Elimation einer Variablen im GAUSS-Algorithmus macht.

Falls also bei der Anwendung des GAUSS-Algorithmus nie eine Vertauschung zweier Zeilen notwendig ist, verändert er die Matrix des Gleichungssystems, indem er sie sukzessive mit Matrizen obiger Form multipliziert, insgesamt gesehen also mit einem Produkt L solcher Matrizen.

Um etwas über Gestalt dieses Produkts zu erfahren, beachten wir, daß L_1 oberhalb der Diagonalen nur Nullen enthält; L_1 ist daher eine untere Dreiecksmatrix im Sinne der folgenden

Definition: Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n\times n}$ heißt *untere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $i < j$; sie heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ wann immer $i > j$.

Eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist also genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{21} = 0$ ist, und genau dann eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{12} = 0$ ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Lemma: *a)* Das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.

b) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Beweis: a) $A = (a_{i\ell})$ und $B = (b_{\ell j})$ seien untere Dreiecksmatrizen, und $C = (c_{ij})$ sei ihr Produkt, d.h.

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \,.$$

Für $i > j$ ist für jedes $\ell < i$ der Eintrag $a_{i\ell} = 0$, da A eine untere Dreiecksmatrix ist, und für $\ell \geq i > j$ ist $b_{\ell j} = 0$, da B eine untere Dreiecksmatrix ist. Also ist auch c_{ij} als Summe von lauter Nullen gleich Null.

b) geht genauso. ■

Damit wissen wir also, daß das Produkt L der Matrizen zu den Zeilenoperationen des GAUSS-Algorithmus eine untere Dreiecksmatrix ist; falls wir ohne Zeilenvertauschungen auskommen, ist die Anwendung des GAUSS-Algorithmus auf ein lineares Gleichungssystem für dessen Matrix also gleichbedeutend mit der Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix L.

Da der GAUSS-Algorithmus aus der Matrix eines Gleichungssystems eine obere Dreiecksmatrix R macht, erhalten wir somit eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R derart, daß

$$LA = R$$

ist. Dabei ist die Matrix L invertierbar, da alle ihre Faktoren invertierbar sind: Die Addition des c-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile wird rückgängig gemacht durch die Subtraktion des c-fachen der i-ten Zeile von der j-ten Zeile, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & c & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & (-c) & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Daher können wir auch schreiben

$$A = L^{-1} R \,.$$

Diese Zerlegung einer Matrix in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen heißt *LR-Zerlegung* der Matrix A. Da man beim GAUSS-Algorithmus im allgemeinen auch Zeilenvertauschungen benötigt, muß sie nicht immer existieren, sie existiert aber, nachdem man in A gegebenenfalls die Zeilen permutiert hat, und das ist für praktische Anwendungen gut genug.

Falls man die LR-Zerlegung einer Matrix kennt, folgt beispielsweise, daß A genau dann invertierbar ist, wenn R invertierbar ist; alsdann ist

$$A^{-1} = R^{-1} L \,.$$

Auch wenn man mehrere Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b}_i$$

mit verschiedenen rechten Seiten $\vec{b}^{(i)}$ lösen muß, ist die Kenntnis der LR-Zerlegung nützlich: Durch Multiplikation mit L werden die Gleichungssysteme zu

$$LA\vec{x} = R\vec{x} = L\vec{b}^{(i)} \,,$$

und diese Gleichungssysteme lassen sich problemlos lösen, da sie Treppengestalt haben, so daß man einfach sukzessive einsetzen kann.

All dies funktioniert natürlich nur, wenn wir den GAUSS-Algorithmus anwenden können ohne daß wir Zeilen miteinander vertauschen müssen. Zeilenvertauschungen entsprechen Multiplikationen mit sogenannten *Permutationsmatrizen:* Wie wir oben gesehen haben, macht die Multiplikation mit E_{ji} die i-te Zeile einer Matrix zur j-ten Zeile und setzt alle anderen Zeilen auf Null. Multiplikation einer Matrix A mit $E_{ji} + E_{ij}$ erzeugt daher eine Matrix, die als i-te Zeile die j-te Zeile von A hat und als j-te Zeile die i-te Zeile von A; alle anderen Zeilen sind Null. Um nun noch die restlichen Zeilen in ihrer ursprünglichen Form zu bekommen, dürfen wir nicht die gesamte Einheitsmatrix addieren, denn sonst hätten wir ja als i-te und j-te Zeile der Produktmatrix jeweils die Summe der i-ten und der j-ten Zeile von A. Stattdessen müssen wir eine Diagonalmatrix D_{ij} addieren, die an der i-ten und j-ten Position der Hauptdiagonalen Nullen hat, ansonsten Einser. Wir erhalten also insgesamt die Matrix $P_{ij} = D_{ij} + E_{ij} + E_{ji}$ der Form

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1}
\end{pmatrix},$$

die sich nur in der i-ten und der j-ten Zeile von einer Diagonalmatrix unterscheidet.

Diese Matrix ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\pi_{ij}: k^n \to k^n; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

die die i-te und die j-te Koordinate eines Vektors vertauscht; ein Produkt solcher Matrizen ist dementsprechend die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die in irgendeiner anderen Weise die Koordinaten permutiert; man bezeichnet eine solche Matrix daher als *Permutationsmatrix*. Offensichtlich enthält sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins, ansonsten lauter Nullen. Eine Permutationsmatrix ist stets invertierbar, da man jede Permutation auch wieder rückgängig machen kann.

Da man im GAUSS-Algorithmus stets durch Zeilenvertauschungen und Eliminationsschritte zur Endgestalt kommen kann, gibt es daher zu jeder beliebigen Matrix $A \in k^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß

$$LPA = R$$

ist. Da P und L invertierbar sind, kann man dies auch als

$$A = P^{-1}L^{-1}R$$

schreiben, d.h. jede Matrix läßt sich schreiben als Produkt einer Permutationsmatrix, einer unteren Dreiecksmartrix und einer oberen Dreiecksmatrix. Wichtiger ist allerdings die obige Darstellung $LPA = R$, denn sie gestattet es, ein beliebiges Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

in das einfacher zu lösende Gleichungssystem

$$R\vec{x} = LP\vec{b}$$

überzuführen; nach Berechnung der beiden Matrizen R und LP lassen sich also solche Gleichungssysteme mit wechselnden rechten Seiten effizient lösen.

Nachdem die LR-Zerlegung somit durchaus recht nützlich ist, stellt sich noch die Frage, wie man sie am besten berechnet. Das oben skizzierte Verfahren zur Herleitung der LR-Zerlegung ist natürlich *im Prinzip* auch rechnerisch durchführbar, allerdings ist der Gedanke an eine Matrixmultiplikation für *jede einzelne* Zeilenoperation nicht gerade attraktiv.

Eine bessere Methode liefert, wie so oft in der linearen Algebra, der GAUSS-Algorithmus: Die Endform eines linearen Gleichungssystems nach Durchführung aller Eliminationsschritte macht aus der ursprünglichen Matrix A des Gleichungssystems die Matrix $LA = R$; zumindest diese berechnet der GAUSS-Algorithmus also direkt.

L erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welche Funktion diese Matrix hat: Sie gibt an, welche Zeilenoperationen ausgeführt werden. Ist also $\vec{b}$ eine rechte Seite, so ist $L\vec{b}$ die rechte Seite des Gleichungssystem nach Durchführung der Eliminationsschritte. Wenn wir entsprechend neben die Matrix A noch eine Matrix B schreiben und mit dieser alle Zeilenoperationen genauso ausführen wie mit A, so steht nachher rechts die Matrix LB. Speziell für $B = E$ ist dies L selbst, d.h. das algorithmische Verfahren zur Bestimmung der LR-Zerlegung ist gerade die erste Hälfte des Verfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix: Wir schreiben die Matrizen A und E nebeneinander und führen die Eliminationsschritte des GAUSS-Algorithmus durch; danach haben wir die Matrizen $LA = R$ und $LE = L$.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Hier müssen wir vor der Anwendung des GAUSS-Algorithmus offensichtlich Zeilen vertauschen, z.B. die erste und die zweite. Dies entspricht einer Multiplikation mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führt auf

$$A' = PA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben die Einheitsmatrix daneben:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Sechs links unten wird eliminiert durch Subtraktion der zweifachen ersten Zeile von der letzten:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Endgestalt entsteht daraus, wenn man nun noch die zweite Zeile zur dritten addiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier steht links die Matrix R, rechts steht L, d.h.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$LPA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

ist.

§5: Determinanten

Determinanten liefern ein numerisches Kriterium für die lineare Abhängigkeit von n Vektoren im n-dimensionalen Raum. Zum besseren Verständnis betrachten wir zunächst den zwei- und den dreidimensionalen Fall.

a) Das Skalarprodukt und Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Aus der Schule sind zwei Produkte von Vektoren bekannt, die wir bei der Definition des Vektorraums nicht berücksichtigt hatten: Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt.

Beginnen wir mit dem Skalarprodukt. Es hat seinen Namen daher, daß es zwei Vektoren zu einem *Skalar* verknüpft; diese wird mit $\vec{v} \cdot \vec{w}$ oder auch kurz $\vec{v}\vec{w}$ bezeichnet. Nach Definition ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \underset{\text{def}}{=} |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}),$$