Literaturhinweise

Das Angebot von Lehrbüchern zum Thema „Höhere Mathematik“ ist riesig, und fast jedes dieser Bücher kann zumindest für Teile dieser Vorlesung nützlich sein. Ich habe hier vor allem Bücher aufgeführt, die ich selbst schon irgendwann einmal benutzt habe und daher einigermaßen kenne. Die meisten davon sind in der Mathematischen Bibliothek zu finden, teils im allgemeinen Bestand, teils auch in der Lehrbuchsammlung. Die beiden erstgenannten Bücher **[MV]** und **[D]** verfolgen wohl am ehesten den gleichen Zweck wie diese Vorlesung:

[MV1] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik I, Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung,* Springer, ^{6}2001

[MV2] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik II, Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung,* Springer, ^{4}2001

Dieses zweibändige Werk enthält den gesamten Stoff der *Höheren Mathematik* sowie die dafür relevanten Teile der *Analysis I.* Die Darstellung ist recht kompakt mit fast vollständigen Beweisen; zu einigen Grundalgorithmen sind Programme angegeben. Für die *Höhere Mathematik I* reicht der erste Band.

[D] H.J. DIRSCHMID: *Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik,* Vieweg, 1992

Etwa fünf Pfund Mathematik, die nicht nur diese Vorlesung mehr als abdecken, sondern für viele Studenten für deren gesamtes Berufsleben ausreichen dürften. Der Schwerpunkt liegt eindeutig auf dem Gebiet der Analysis; numerische Mathematik und Statistik sind (wie auch in der Vorlesung) so gut wie nicht

vorhanden. Interessant vor allem für Technische Informatiker; für Software- und Internettechnologen, die keine *Höhere Mathematik II* hören, etwas zu viel des Guten. Leider auch sehr teuer.

[BDH] BRAUCH/DREYER/HAACKE: *Mathematik für Ingenieure,* Teubner ^{9}1995

Dieses Buch richtet sich an Studenten von Fachhochschulen und ist somit nach Ansicht mancher Kollegen nicht für eine Vorlesung an der Universität geeignet. Wer sich allerdings eher für höhere Mathematik als für höheren Dünkel interessiert, findet hier ziemlich kompakt und relativ preisgünstig fast den gesamten Stoff zumindest der HM I; lediglich die Darstellung der Vektoranalysis ist etwas zu knapp.

[W1] T. WESTERMANN: *Mathematik für Ingenieure mit MAPLE I,* Springer ^{2}2000

[W2] T. WESTERMANN: *Mathematik für Ingenieure mit MAPLE II,* Springer ^{2}2001

Auch diese beiden Bände wenden sich eher an Studenten von Fachhochschulen; sie passen vom Aufbau her nicht sonderlich gut zur Vorlesung, haben aber den Vorteil, daß sie parallel zum Stoff auch das Computeralgebrasystem MAPLE behandeln und anwenden. Eine CD mit entsprechenden *worksheets* sowie einer eingeschränkten Version von MAPLE V.0 liegt jedem der beiden Bände bei. Interessant vor allem für Studenten, die parallel zur Vorlesung auch den Umgang mit einem Computeralgebrasystem üben wollen und noch keinerlei entsprechende Erfahrung haben. Die *Höhere Mathematik I* behandelt Stoff aus beiden Bänden.

[F] P. FURLAN: *Das gelbe Rechenbuch 1–3*, Verlag Martina Furlan, Dortmund, *o.J.*

Wer vor allem auf Drill und durchgerechnete Beispiele Wert legt, findet hier laut Untertitel „Rechenverfahren der Höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt. Mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen“. Mit den dort vorexerzierten Kochrezepten lassen sich die gängigen Typen von Standardaufgaben lösen; wenn auch nicht immer optimal: Wie immer beim sturen Nachexerzieren von Kochrezepten läuft man Gefahr, sich oftmals zuviel Arbeit zu machen, da sich konkrete Probleme oft mit etwas Theorie beträchtlich vereinfachen lassen (und, bei realen Problemen, teilweise auch erst dadurch mit vertretbarem Aufwand lösbar werden).

Als Ergänzung zur *Höheren Mathematik I* können, mit diesen Einschränkungen, die ersten beiden Bände nützlich sein – insbesondere auch in der Endphase der Klausurvorbereitung.

Zumindest für *Technische Informatiker,* die im weiteren Verlauf ihres Studiums (und Berufslebens) immer wieder mit mathematischen Problemen konfrontiert werden, empfiehlt sich über kurz oder lang die Anschaffung einer Formelsammlung; ein Klassiker, der seit Jahrzehnten in immer neuen Auflagen erscheint und mit dem schon Generationen von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren gearbeitet haben, ist „der BRONSTEIN“, der seit einigen Jahren in zwei konkurrierenden Neubearbeitungen angeboten wird, wobei die erste wahlweise mit oder ohne CD-ROM erhältlich ist.

[BSM] I.N. BRONSTEIN, K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL: *Taschenbuch der Mathematik,* Verlag Harri Deutsch, 2000

[BGZ] I.N. BRONSTEIN, G. GROSCHE, E. ZEIDLER: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik,* Teubner, 1996

Dazu seien noch einige „Klassiker“ genannt: Lehrbücher, die seit Jahrzehnten in immer neuen Auflagen erscheinen und die auch heute noch interessant sind. Es handelt sich um Werke aus meist recht vielen Bänden, wobei selbst der Stoff der Vorlesung *Höhere Mathematik I* je nach Organisation des Gesamtwerks auf bis zu drei Bände verteilt sein kann. Wegen der Vielzahl von Auflagen und Bänden verzichte ich auf die Angabe von Erscheinungsjahren.

[S] W.I. SMIRNOW: *Lehrbuch der Höheren Mathematik,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Ein Klassiker, nach dem Generationen von russischen und (nicht nur ost-)deutschen Naturwissenschaftlern und Ingenieuren ausgebildet wurden; enthält in vier Bänden (von denen die letzten beiden noch in Halbbände unterteilt sind) den gesamten klassischen Stoff der Mathematik für Naturwissenschaftler und

Ingenieure (also erheblich mehr, als im zweisemestrigen Kurs *Höhere Mathematik* behandelt werden kann) und ist auch heute noch sehr gut zu lesen. Die HM I behandelt Stoff aus den Bänden I, II und III/1.

[R] R. ROTHE: *Höhere Mathematik,* Teubner

Sieben (dünne) Bände, zu denen allerdings auch Aufgaben- und Formelsammlung gehören, so daß die Darstellung insgesamt eher knapp ist. Für diese Vorlesung relevant sind die Bände II und III.

[Du] A. DUSCHEK: *Höhere Mathematik,* Springer Wien

Die österreichische Variante, vier recht ausführliche Bände, von denen hier vor allem die ersten beiden von Interesse sind.

[A] G. AUMANN: *Höhere Mathematik,* Bibliographisches Institut Mannheim

Drei relativ dünne Taschenbücher, deren erste beide trotzdem fast alles enthalten, was wir in dieser Vorlesung brauchen. Die Darstellung ist natürlich weniger ausführlich als in den dickleibigen Werken, aber das wird nicht jeder Student als Nachteil empfinden.

[C] R. COURANT: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I+II,* Springer

Ein Klassiker eines berühmten Mathematikers, auch heute noch sehr lesenswert. Trotz des Titels beschränkt sich das Buch nicht auf Analysis, sondern behandelt auch beispielsweise die Lineare Algebra in einem Umfang, der für diese Vorlesung völlig ausreicht.

Kapitel 1
Vektorräume und lineare Gleichungssysteme

Lineare Strukturen sind sowohl in der Mathematik als auch in ihren Anwendungen allgegenwärtig: Zwar sind die meisten Funktionen nichtlinear, aber fast alles, was man damit anstellt – Differenzieren, Integrieren, FOURIER- oder LAPLACE-transformieren *usw.* – wird sich als lineare Operation herausstellen. Vektorräume bieten einen gemeinsamen Rahmen für alle diese Operationen und sind daher wichtige Hilfsmittel nicht nur innerhalb der Mathematik, wie etwa für Analysis, Geometrie, Differentialgleichungen und Integraltransformationen, sondern auch beispielsweise in der Optimierung, der Signalverarbeitung (z.B. Kodierungstheorie, Kryptographie und Bildverarbeitung) und der Optik.

§1: Vektoren und Vektorräume

Abstrakte Mathematik lebt davon, daß anschauliche Phänomene formalisiert werden, um die so entstehende formale Struktur auf andere, weniger anschauliche Phänomene anzuwenden. So ist auch der Begriff des Vektorraums entstanden aus den wohlbekannten Vektoren der Ebene und des Raumes.

a) Vektoren in der Ebene und im Raum

Erinnern wir uns: Vektoren werden dargestellt durch *Pfeile*, d.h. durch gerichtete Verbindungsstrecken zweier Punkte. Sie sind festgelegt durch die Angabe von Anfangs- und Endpunkt, aber auch beispielsweise durch die Angabe von Anfangspunkt, Länge und Richtung, wobei diese Richtung jedoch für Pfeile der Länge Null nicht definiert ist.

Pfeile dieser Art sind nützlich beispielsweise für die Darstellung von elektrischen oder magnetischen Feldern wie etwa den in Abbildung eins dargestellten: dem Feld einer abstoßenden Punktladung und dem Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

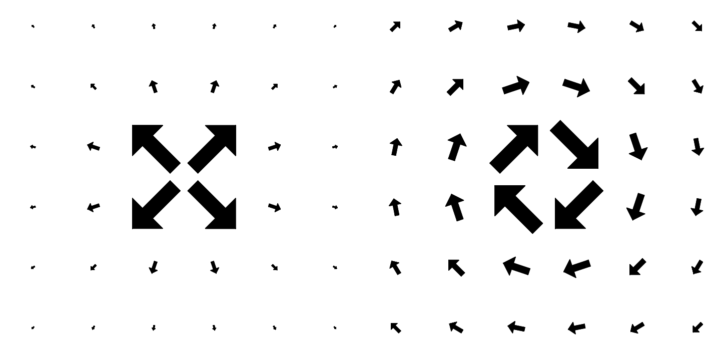

Abb. 1: Zwei elektromagnetische Felder

Zwei Pfeile lassen sich addieren, falls der Endpunkt des ersten gleich dem Anfangspunkt des zweiten ist; die Summe ist dann derjenige Pfeil, der den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkt des zweiten Pfeils verbindet. Auch läßt sich ein Pfeil mit einer reellen Zahl multiplizieren, wenn wir vereinbaren, daß das Ergebnis jeder Pfeil sein soll, der denselben Anfangspunkt und diesselbe Richtung hat wie der ursprüngliche Pfeil, dessen Länge aber mit der reellen Zahl multipliziert wurde. (Eine Multiplikation mit einer negativen Zahl soll dabei bedeuten, daß der Pfeil an seinem Anfangspunkt gespiegelt und dann mit dem Betrag der Zahl multipliziert wird.)

Sobald wir uns allerdings dafür interessieren, wie sich ein Teilchen im kombinierten Kraftfeld der Punktladung und des stromdurchflossenen Leiters bewegt, reichen Pfeile nicht mehr aus: Wir haben zwar für jeden Punkt der Ebene (außer dem Nullpunkt) einen Kraftpfeil für jedes Feld, aber natürlich müssen wir in jedem Punkt die beiden *dort* beginnenden Kraftpfeile addieren, was mit Pfeilen nicht geht.

Die Lösung dieses Problems ist wohlbekannt: Die beiden Pfeile werden gemäß dem „Parallelogramm der Kräfte“ kombiniert, d.h. der eine Pfeil wird so verschoben, daß sein Anfangspunkt gleich dem Endpunkt des anderen Pfeils ist. Wie Abbildung zwei zeigt, ist das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Summanden, d.h.

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}\,.$$

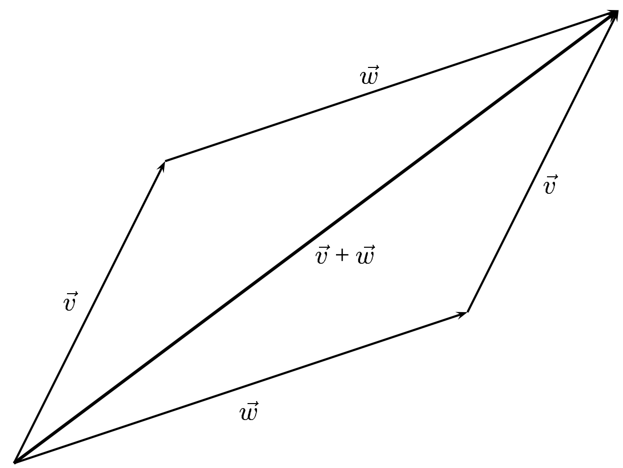

Abb. 2: Das „Parallelogramm der Kräfte“

Wir definieren daher als neuen Begriff einen *Vektor* als etwas, das zwar wie ein Pfeil eine Länge und eine Richtung haben soll, aber keinen Anfangspunkt. Mathematisch exakt ausgedrückt ist also ein Vektor eine *Äquivalenzklasse* von Pfeilen, wobei zwei Pfeile genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselbe Länge und (so die Länge von Null verschieden ist) dieselbe Richtung haben.

Vektoren werden in der Literatur meist durch Fraktur- oder Fettbuchstaben bezeichnet; da sich Fettdruck schlecht an der Tafel realisieren läßt und Frakturbuchstaben meist zu Hörerprotesten führen, verwenden wir hier stattdessen lateinische Buchstaben, die mit einem Pfeil überstrichen sind, also $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$. Die Addition zweier Vektoren wird durch das

gewöhnliche Pluszeichen ausgedrückt, wir schreiben also $\vec{v} + \vec{w}$. Aus dem „Parallelogramm der Kräfte“ in Abbildung zwei liest man sofort ab, daß $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ ist. Abbildung drei zeigt die Summe der beiden Kraftfelder aus Abbildung eins.

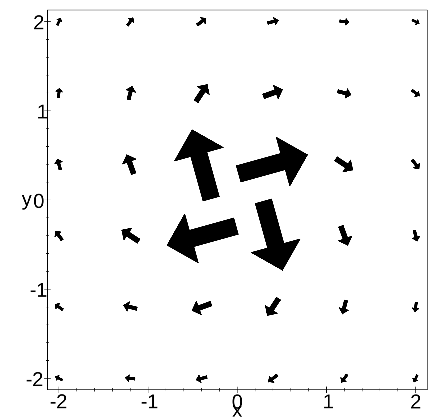

Abb. 3: Die Summe der beiden Felder aus Abbildung eins

Als weitere Eigenschaft der Vektoraddition wollen wir festhalten, daß es zu jedem Vektor $\vec{v}$ einen Vektor $\vec{w}$ gibt, so daß

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

der Nullvektor ist; $\vec{w}$ ist einfach der entgegengesetzt orientierte Vektor $\vec{v}$. Wir bezeichnen diesen Vektor kurz als $-\vec{v}$.

Die Addition des Nullvektors ändert natürlich nichts am anderen Summanden, d.h.

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \quad \text{für alle Vektoren } \vec{v}\,.$$

Schließlich gilt für die Vektoraddition auch noch das Assoziativgesetz

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right),$$

wie man sich leicht überzeugt, indem man das Diagramm für die Konstruktion von $\vec{v} + \vec{w}$ an den Endpunkt des Vektors $\vec{u}$ verschiebt; siehe Abbildung vier.

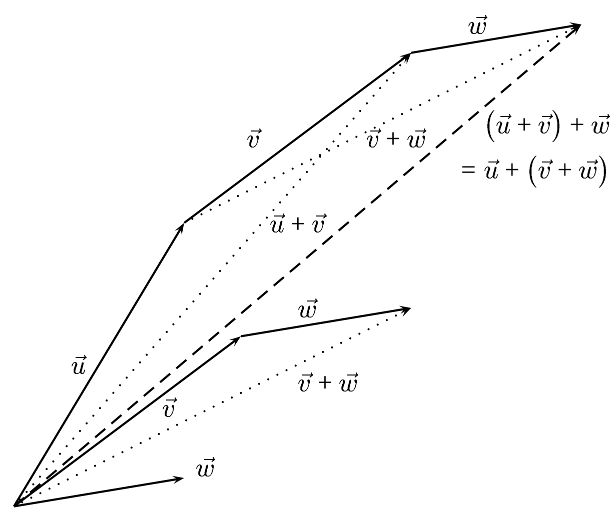

Abb. 4: Das Assoziativgesetz der Vektoraddition

Außer der Addition von Vektoren können wir auch ihre Streckung, d.h. ihre Multiplikation mit einer reellen Zahl, definieren: Ist $\vec v$ ein Vektor und $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl, so soll $\lambda\vec v$ dieselbe Richtung haben wie $\vec v$ und die λ-fache Länge; für $\lambda < 0$ soll $\lambda\vec v$ die entgegengesetzte Richtung haben und die $|\lambda|$-fache Länge. Für $\lambda = 0$ schließlich ist $\lambda\vec v$ der Nullvektor.

Anwendung des Strahlensatzes auf das Dreieck in Abbildung fünf zeigt, daß für diese Multiplikation das Distributivgesetz

$$\lambda(\vec v + \vec w) = \lambda\vec v + \lambda\vec w$$

gilt: Als Strahlen betrachten wir von $\vec v$ und $\vec v + \vec w$ aufgespannten Halbgeraden, und wir schneiden mit den beiden parallelen Geraden, die durch die eingezeichneten Vektoren $\lambda\vec w$ und $\vec w$ festgelegt sind. Dabei sollen die fett eingezeichneten Vektoren die mit λ multiplizierten sein; im Bild ist $\lambda = 0{,}4$.

Das andere Distributivgesetz $(\lambda + \mu)\vec v = \lambda\vec v + \mu\vec v$ ist ziemlich trivial: Da sich alles auf der von $\vec v$ aufgespannten Geraden abspielt und wir diese mit der reellen Zahlengeraden identifizieren können, läßt sich diese Regel

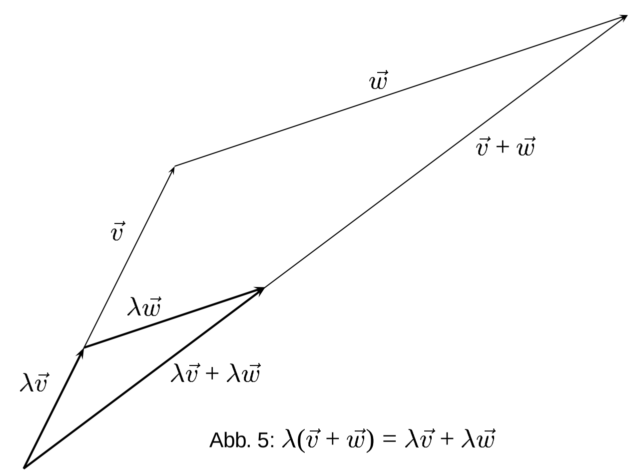

Abb. 5: $\lambda(\vec v + \vec w) = \lambda\vec v + \lambda\vec w$

auf das gewöhnliche Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ zurückführen, genauso wie sich die Regel $(\lambda\mu)\vec v = \lambda(\mu\vec v)$ auf das gewöhnliche Assoziativgesetz der Multiplikation in $\mathbb{R}$ zurückführen läßt.

b) Definition des Vektorraums

Damit haben wir alle Rechenregeln zusammen, die wir für die Definition eines Vektorraums brauchen. Da wir Vektoren auch mit Zahlen multiplizieren wollen, müssen wir zwei Arten von Objekten betrachten: Vektoren, die wir weiterhin mit $\vec v, \vec w$ *usw.* bezeichen, sowie Skalare, für die wir griechische Buchstaben verwenden.

Bislang waren alle Skalare reelle Zahlen, aber das ist zu speziell für Anwendungen in der Informationstechnik: Sowohl bei Wechselströmen als auch in der Wellenoptik zieht man es oft vor, mit komplexen statt mit reellen Zahlen zu rechnen, und in der digitalen Elektronik hat man viel mit Bits und Bytes zu tun, mit denen man zwar rechnen kann, die aber alles andere als reelle Zahlen sind. In der Computergraphik schließlich rechnet man gerne in möglichst kleinen Teilkörpern der reellen Zahlen, denn exaktes Rechnen in $\mathbb{R}$ liegt weit jenseits der Fähigkeiten eines Computers und schon das Problem, ob zwei beliebig gegebene reelle Zahlen gleich sind, ist in dieser Allgemeinheit formal unentscheidbar.

Wir betrachten daher nicht nur Vektorräume, bei denen die Skalare reelle Zahlen sind, sondern Vektorräume über beliebigen Körpern. Zur Erinnerung sei die Definition eines Körpers hier noch einmal wiederholt:

Definition: Ein Körper k ist eine Menge zusammen mit zwei Abbildungen

$$+: k \times k \to k \quad \text{und} \quad \cdot: k \times k \to k\,,$$

genannt *Addition* und *Multiplikation*, für die gilt:

I.1) Das Assoziativgesetz der Addition

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \text{für alle } a,b,c \in k$$

I.2) Es gibt ein Element $0 \in k$, so daß gilt

$$a+0 = 0+a = a \qquad \text{für alle } a \in k$$

I.3) Zu jedem Element $a \in k$ gibt es ein Element $a' \in k$, so daß gilt

$$a+a' = a'+a = 0\,.$$

I.4) Das Kommutativgesetz der Addition

$$a+b = b+a \qquad \text{für alle } a,b \in k$$

II.1) Das Assoziativgesetz der Multiplikation

$$(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \text{für alle } a,b,c \in k$$

II.2) Es gibt ein von 0 *verschiedenes* Element $1 \in k$, so daß gilt

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \text{für alle } a \in k$$

II.3) Zu jedem von 0 verschiedenen Element $a \in k$ gibt es ein Element $a'' \in k$, so daß gilt

$$a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1\,.$$

II.4) Das Kommutativgesetz der Multiplikation

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{für alle } a,b \in k$$

III.) Das Distributivgesetz

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{für alle } a,b,c \in k$$

Das Element a' aus I.3.) wird üblicherweise als $-a$ bezeichnet und a'' aus II.3) als a^{-1}. Statt $a+(-b)$ schreibt man kurz $a-b$, statt $a \cdot b^{-1}$ entsprechend a/b.

Definition: k sei ein Körper. Eine Menge V heißt *Vektorraum* über k oder k-Vektorraum, wenn es zwei Verknüpfungen

$$+: V \times V \to V \quad \text{und} \quad \cdot: k \times V \to V$$

gibt, so daß gilt:

I.1) Das Assoziativgesetz der Vektoraddition

$$(\vec u + \vec v) + \vec w = \vec u + (\vec v + \vec w) \qquad \text{für alle } \vec u, \vec v, \vec w \in V$$

I.2) Es gibt einen Vektor $\vec 0 \in V$, so daß für jeden Vektor $\vec v \in V$ gilt

$$\vec v + \vec 0 = \vec 0 + \vec v\,.$$

I.3) Zu jedem Vektor $\vec v \in V$ gibt es einen Vektor $-\vec v \in V$, so daß

$$\vec v + (-\vec v) = (-\vec v) + \vec v = \vec 0\,.$$

I.4) Das Kommutativgesetz der Vektoraddition

$$\vec u + \vec v = \vec v + \vec u \qquad \text{für alle } \vec u, \vec v \in V$$

II.1) Das Distributivgesetz für Skalare

$$(\lambda+\mu)\vec v = \lambda \vec v + \mu \vec v \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in k \text{ und alle } \vec v \in V\,.$$

II.2) Das Distributivgesetz für Vektoren

$$\lambda(\vec v + \vec w) = \lambda \vec v + \lambda \vec w \quad \text{für alle } \lambda \in k \text{ und alle } \vec v, \vec w \in V\,.$$

II.3) Kompatibilität von Körper- und Skalarmultiplikation

$$(\lambda\mu)\vec v = \lambda(\mu \vec v) \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in k \text{ und alle } \vec v \in V\,.$$

II.4) Multiplikation mit der Eins

$$1\vec v = \vec v \quad \text{für alle } \vec v \in V\,.$$

II.5) Multiplikation mit der Null *bzw.* mit dem Nullvektor

$$0\vec v = \vec 0 \quad \text{für alle } \vec v \in V \qquad \text{und} \qquad \lambda \vec 0 = \vec 0 \quad \text{für alle } \lambda \in k\,.$$

Bemerkung: Die Forderungen I.1–I.4 in der Definition des Körpers und des Vektorraums sowie die Forderungen II.1–II.4 in der Körperdefinition sind fast identisch, und in der Tat beschreiben sie eine gemeinsame mathematische Struktur, die sogenannte *abelsche Gruppe*. Da wir diese nicht weiter benötigen werden, sei auf Einzelheiten verzichtet.

Vektoren und Vektorräume sind als mathematische Begriffe recht jung: Rechnerische Methoden zur Lösung geometrischer Probleme wurden zwar schon ab etwa 1636 beispielsweise von RENÉ DESCARTES (1596–1650) eingesetzt (kartesische Koordinaten), aber erst gegen Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Ansätze entwickelt, um geometrische Objekte *koordinatenfrei* algebraisch zu behandeln. Ein erster Durchbruch war das 1844 erschienene Buch *Die Ausdehnungslehre* von HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809–1877, oberes Bild): Er betrachtete abstrakte Objekte, die unter anderem alle Vektorraumaxiome erfüllten, die darüber hinaus allerdings auch miteinander multipliziert werden konnten, so daß er etwas komplizierteres als einen Vektorraum definiert hatte: eine sogenannte Algebra. Sie spielt noch heute eine große Rolle bei der Charakterisierung der Lage zweier Vektorräume ineinander. 1888 definierte GIUSEPPE PEANO (1858–1932, unteres Bild) in seinem Buch *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* Vektorräume (über $\mathbb{R}$) im obigen Sinne; in diesem Buch treten auch erstmalig mengentheoretische Symbole wie $\cap$, $\cap$ und $\in$ auf. Ab etwa 1920 wandte STEFAN BANACH (1892–1945) PEANOs Theorie an von Funktionenräume und lineare Operatoren.

c) Erste Beispiele

Standardbeispiel sind natürlich die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben ihre Elemente als Spaltenvektoren der Form

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

und haben die beiden Rechenoperationen

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$

Alle Rechenregeln folgen sofort aus den entsprechenden Regeln für reelle Zahlen, und genauso können wir auch für einen beliebigen Körper k die k-Vektorräume k^n definieren.

Auf den ersten Blick seltsam erscheint, daß $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist: Vektoraddition ist die gewöhnliche Addition reeller Zahlen und Multiplikation mit Skalaren die Multiplikation einer reellen Zahl mit einer rationalen. Auch hier folgen alle Vektorraumaxiome sofort aus den üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen, für die es natürlich gleichgültig ist, daß hier einige der betrachteten Zahlen sogar rational sind.

Interessanter ist das folgende Beispiel: Für eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}$, als z.B. ein offenes Intervall $U = (a,\ b)$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$\mathcal{C}^n(U, \mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar} \right\}.$$

Für deren Elemente seien Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert, d.h. für $f, g \in \mathcal{C}^n(U, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f + g\colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) + g(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \lambda f\colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda f(t), \end{cases}.$$

Abbildung sechs zeigt für $(a,\ b) = (0,\ 3\pi)$ zu den beiden dünn eingezeichneten Funktionen $f(t) = \sin t$ und $g(t) = \sin 3t$ die dick eingezeichnete Funktion $f + g$, und Abbildung sieben zeigt f zusammen mit der Funktion $2f$.

Damit dies alles wohldefiniert ist, müssen wir uns noch überlegen, daß mit f und g die Funktionen $f + g$ und λf wieder in $\mathcal{C}^n(U, \mathbb{R})$ liegen. Das ist aber klar, denn die Summe zweier stetiger *bzw.* differenzierbarer Funktionen ist wieder stetig *bzw.* differenzierbar, und wegen der Rechenregel $(f+g)' = f' + g'$ gilt dies auch für die höheren Ableitungen. Genauso kann man für λf argumentieren. Da alle Rechenoperationen auf die gewöhnliche reelle Addition und Multiplikation für die

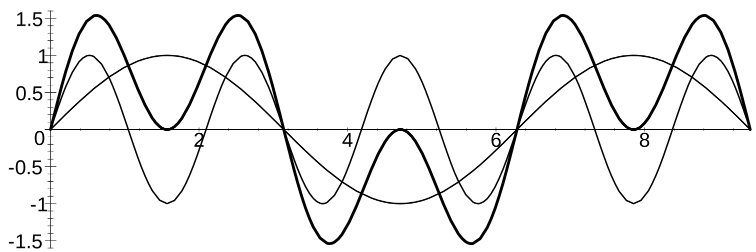

Abb. 6: Die Summe von $f(t) = \sin t$ und $g(t) = \sin 3t$

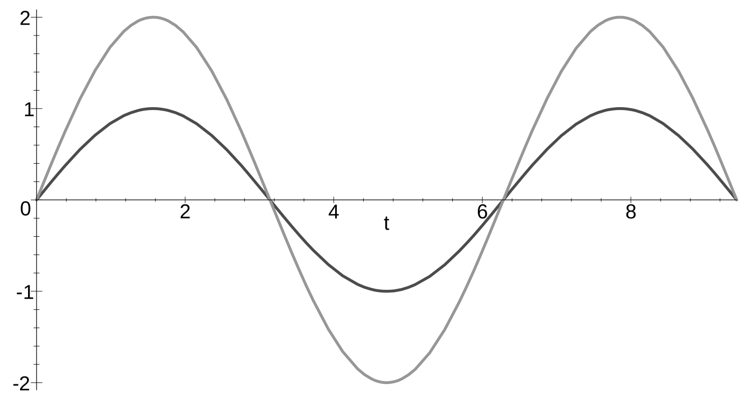

Abb. 7: $f(t) = \sin t$ zusammen mit $2f$

Funktionswerte zurückgeführt ist, folgen die Vektorraumaxiome aus den üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen: Um etwa das Assoziativgesetz

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß für jede reelle Zahl t die Funktionen auf beiden Seiten denselben Wert haben, d.h.

$$\big((f+g)+h\big)(t) = \big(f+(g+h)\big)(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Dazu rechnen wir beide Seiten aus:

$$\big((f+g)+h\big)(t) = (f+g)(t)+h(t) = \big(f(t)+g(t)\big)+h(t)$$

und

$$\big(f+(g+h)\big)(t) = f(t)+(g+h)(t) = f(t)+\big(g(t)+h(t)\big)\,,$$

und die beiden rechten Seiten stimmen in der Tat überein nach dem Assoziativgesetz für die Addition reeller Zahlen.

Die restlichen Axiome folgen genauso, nur etwas einfacher.

Ganz entsprechend lassen sich auch die Mengen

$$\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}) = \big\{ f\colon U \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ ist stetig} \big\}$$

und

$$\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}) = \big\{ f\colon U \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \big\}$$

sowie

$$\mathcal{C}^\omega(U,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ ist um jeden Punkt } x \in U \text{ durch} \\ \text{eine Taylor-Reihe darstellbar} \end{array} \right\}$$

zu $\mathbb{R}$-Vektorräumen machen. (Wer noch nicht weiß, was eine TAYLOR-Reihe ist, wird es im nächsten Kapitel lernen.)

Als trivialstes Beispiel überhaupt haben wir schließlich noch über jedem Körper k den Nullvektorraum, der nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$ besteht.

d) Lineare Abbildungen

Vektorräume werden erst richtig interessant, wenn man mit ihren Elementen etwas mehr tun kann als sie nur zu addieren und mit Skalaren zu multiplizieren. In der Geometrie etwa möchte man Vektoren gelegentlich auch drehen, bei Vektorräumen von differenzierbaren Funktionen möchte man deren Elemente differenzieren und so weiter. Viele derartige Operationen lassen sich unter dem Begriff der linearen Abbildung einordnen:

Definition: *a)* Eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt *linear,* wenn für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in k$ gilt:

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v})\,.$$

b) Unter dem *Kern* von φ verstehen wir die Menge

$$\operatorname{Kern}\varphi \underset{\text{def}}{=} \left\{\vec{v} \in V \;\middle|\; \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\right\}.$$

c) Das *Bild* von φ ist die Menge

$$\operatorname{Bild}\varphi \underset{\text{def}}{=} \left\{\vec{w} \in W \;\middle|\; \text{Es gibt } \vec{v} \in V \text{ mit } \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\right\}.$$

Die beiden allereinfachsten Beispiele für lineare Abbildungen sind für jeden Vektorraum V die identische Abbildung $V \to V$ sowie die Nullabbildung, die jedem Vektor $\vec{v} \in V$ den Nullvektor zuordnet. Letztere kann man wahlweise als Abbildung $V \to V$ oder als Abbildung von V in den Nullvektorraum auffassen.

Ebenfalls völlig trivial ist die Linearität von *Projektionen* wie etwa der Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die jedem Vektor seine ersten beiden Komponenten zuordnet.

Ein etwas interessanteres Beispiel einer linearen Abbildung ist

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix} \end{cases};$$

sie ist linear, denn

$$\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 - \lambda z_1 - \mu z_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda\cdot\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + \mu\cdot\varphi\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ y_1 - z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ y_2 - z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 - \lambda y_1 + \mu x_2 - \mu y_2 \\ \lambda y_1 - \lambda z_1 + \mu y_2 - \mu z_2 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich dasselbe ist.

Bei Vektorräumen von Funktionen ist beispielsweise für jeden Punkt $t_0 \in (a, b)$ die Auswertungsabbildung

$$\mathcal{C}^n\big((a, b), \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(t_0)$$

nach Definition der Vektorraumoperationen von $\mathcal{C}^n\big((a, b), \mathbb{R}\big)$ linear, denn $\lambda f + \mu g$ wurde ja gerade so definiert, daß für t_0 wie auch für jeden anderen Punkt aus (a, b) gilt

$$\big(\lambda f + \mu g\big)(t_0) = \lambda f(t_0) + \mu g(t_0).$$

Allgemeiner können wir auch die *Abtastung* einer Funktion betrachten: Für vorgegebene Punkte $t_1, \ldots, t_N \in (a, b)$ definieren wir die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^n\big((a, b), \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}^N \\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{pmatrix} \end{cases},$$

die f an N Argumenten auswertet. Anwendung ist beispielsweise die Digitalisierung eines Signals, etwa eines Musikstücks für eine CD. Hier würde die Funktion f die zeitliche Variation des Schalldrucks beschreiben (die man zumindest als stetig annehmen kann, d.h. $n = 0$), und die Punkte t_i wären gleichmäßig über die Länge des Musikstücks verteilt, jeweils 44 100 Stück pro Sekunde.

Diese Abbildung ist linear, weil jede ihrer Komponentenabbildungen $f \mapsto f(t_i)$ linear ist. Wir können die Linearität dieser Digitalisierung eines Signals aber auch inhaltlich interpretieren: Die Eigenschaft

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

bedeutet für positive λ und μ, daß es gleichgültig ist, ob man zwei verschiedene Signale (z.B. Mikrophonkanäle) zunächst in einem analogen Mischpult vereinigt und dann digitalisiert oder zunächst digitalisiert und dann digital mischt. (Dieses setzt natürlich voraus, daß man sowohl analog als auch digital mit perfekter Genauigkeit arbeitet – keine sehr realistische Annahme.)

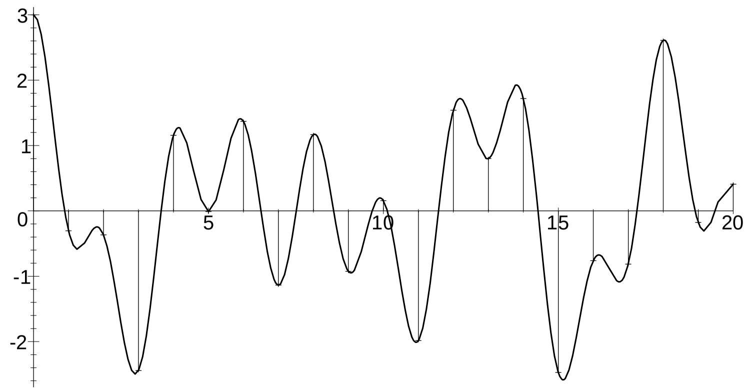

Abb. 8: Abtastung eines Signals

Ein anderes Beispiel einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen von Funktionen ist die Differentiation

$$\mathcal{C}^{n+1}\big((a,b),\mathbb{R}\big) \to \mathcal{C}^{n}\big((a,b),\mathbb{R}\big); \quad f \mapsto \dot{f}\,,$$

denn $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. Auch die Abbildung

$$\mathcal{C}^{2}\big((a,b),\mathbb{R}\big) \to \mathcal{C}^{0}\big((a,b),\mathbb{R}\big); \quad f \mapsto f'' + \omega^2 f$$

ist für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ linear; ihr Kern besteht genau aus jenen Funktionen $f(t)$, die der Schwingungsdifferentialgleichung

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$$

genügen, enthält also beispielsweise die Funktionen $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$.

e) Untervektorräume

Kern und Bild einer linearen Abbildung werden im allgemeinen unendliche Mengen sein, so daß selbst bei Vektorräumen wie dem $\mathbb{R}^3$ zunächst nicht ganz klar ist, wie man sie mit endlichem Aufwand beschreiben kann. Bei nichtlinearen Abbildungen kann so etwas in der Tat ein großes Problem sein, aber hier im Linearen reichen unsere vorhandenen Werkzeuge zumindest für Vektorräume wie einen $\mathbb{R}^n$ völlig aus. Zur Klärung der Begriffe beginnen wir mit einer

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines k-Vektorraums V heißt *Untervektorraum,* in Zeichen $U \le V$, wenn U nicht leer ist und mit je zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und Skalaren $\lambda, \mu \in k$ auch den Vektor $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ enthält.

Lemma: $\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen zwei k-Vektorräumen. Dann ist Kern φ ein Untervektorraum von V und Bild φ ein Untervektorraum von W.

Beweis: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Elemente des Kerns von $\varphi\colon V \to W$ und $\lambda, \mu \in k$ Skalare, so ist

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}\,,$$

also liegt auch $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ im Kern von φ. Außerdem ist dieser nicht leer, denn wegen

$$\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

liegt der Nullvektor in Kern φ. Also ist der Kern ein Untervektorraum.

Ähnlich ist die Situation für das Bild: Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in$ Bild φ gibt es Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in V$, so daß $\varphi(\vec{r}) = \vec{v}$ und $\varphi(\vec{s}) = \vec{w}$ ist. Wegen der Linearität von φ liegt dann für zwei Skalare $\lambda, \mu \in k$ auch

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \lambda\varphi(\vec{r}) + \mu\varphi(\vec{s}) = \varphi(\lambda\vec{r} + \mu\vec{s})$$

im Bild von φ, das somit ein Untervektorraum von W ist. ■

Kern und Bild einer linearen Abbildung haben natürlich etwas mit deren Injektivität und Surjektivität zu tun; erinnern wir uns zunächst an die Definition dieser Begriffe:

Definition: *a)* Eine Abbildung $\varphi\colon M \to N$ zwischen zwei Mengen heißt *injektiv,* wenn keine zwei verschiedenen Elemente von M dasselbe Bild haben, d.h. aus der Gleichheit von $\varphi(m_1)$ und $\varphi(m_2)$ folgt für zwei Elemente $m_1, m_2 \in M$, daß $m_1 = m_2$ ist.
b) φ heißt *surjektiv,* wenn es zu jedem $n \in N$ (mindestens) ein $m \in M$ gibt, so daß $\varphi(m) = n$ ist.
c) φ heißt *bijektiv* oder auch „eins-zu-eins (1-1)“, wenn φ injektiv und surjektiv ist.

Lemma: $\varphi\colon V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn Kern φ der Nullvektorraum ist; φ ist genau dann surjektiv, wenn Bild $\varphi = W$ ist.

Beweis: Die zweite Aussage ist zu trivial, als daß man etwas dazu sagen müßte, betrachten wir also die erste. Falls φ injektiv ist, hat insbesondere der Nullvektor nur ein einziges Urbild, d.h. der Kern besteht nur aus dem Nullvektor, der natürlich immer im Kern liegt. Ist umgekehrt Kern φ der Nullraum und haben zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dasselbe Bild, so ist

$$\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\,,$$

d.h. $\vec{u} - \vec{v}$ liegt im Kern und muß daher gleich dem Nullvektor sein, so daß $\vec{u} = \vec{v}$ ist. Dies zeigt die Injektivität von φ. ■

Als Beispiel einer Anwendung dieses Lemmas betrachten wir noch einmal die Digitalisierung eines Signals: Aufgrund der hoch gelobten CD-Qualität erwarten wir, daß in diesem Fall die Abtastung eine „einigermaßen injektive" lineare Abbildung ist. Das Wort „einigermaßen injektiv" ist zwar kein wohldefinierter mathematischer Begriff, aber schon die Tatsache, daß bei einer CD die Abtastwerte nicht als reelle Zahlen gespeichert werden, sondern als 16bit-Zahlen, macht eine „echte" Injektivität unmöglich. Überlegen wir uns, was sonst noch alles schiefgehen kann.

Nach dem gerade bewiesenen Lemma reicht es, wenn wir den Kern der Abbildung kennen. Dort liegt, bei einer Abtastung mit 44 100 Hz und in Sekunden gemessener Zeit, beispielsweise die Funktion

$$f(t) = \sin\bigl(44\,100\,\pi t\bigr) = \sin\bigl(22\,050 \cdot 2\pi t\bigr)\,;$$

denn für jedes ganzzahlige Vielfache von $1/44\,100$ ist das Argument des Sinus ein ganzzahliges Vielfaches von π, der Sinus also null.

Die Funktion $f(t)$ entspricht einer reinen Schwingung mit einer Frequenz von 22,05 kHz. Solche Frequenzen sind zwar sehr wichtig für die Navigation von Fledermäusen, sie sind aber unhörbar für Käufer von CDs, so daß uns dieses Element des Kerns nicht weiter stört.

Betrachten wir aber beispielsweise die Funktionen

$$g(t) = \sin\bigl(66\,150\,\pi t\bigr) \quad \text{und} \quad h(t) = \sin\bigl(22\,050\,\pi t\bigr)\,.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $t = k/44\,100$ ist

$$g(t) = g\left(\frac{k}{44\,100}\right) = \sin\left(66\,150\pi \cdot \frac{k}{44\,100}\right) = \sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } k \\ -1 & \text{für } k \equiv 1 \bmod 4 \\ 1 & \text{für } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

und

$$h(t) = h\left(\frac{k}{44\,100}\right) = \sin\left(22\,050\pi \cdot \frac{k}{44\,100}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } k \\ 1 & \text{für } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{für } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases},$$

wobei $k \equiv a \bmod b$ bedeuten soll, daß $k - a$ durch b teilbar ist. Damit sind die beiden Funktionen g und h an allen Abtaststellen entgegengesetzt gleich, d.h. die Funktion $g + h$ liegt im Kern von φ.

Dieses Element des Kern stört uns erheblich mehr, denn es hat zur Folge, daß die beiden Funktion $g(t) = \sin\bigl(66\,150\,\pi t\bigr)$ und $-h(t) = -\sin\bigl(22\,050\,\pi t\bigr)$ auf dieselbe Weise digitalisiert werden. g beschreibt aber einen für Menschen unhörbaren Ton mit einer Frequenz von 33,075 kHz, während h mit nur 11,025 kHz durchaus hörbar ist. Abbildung neun zeigt die beiden Schwingungen; die Zeitachse ist der besseren Übersicht wegen in Millisekunden beschriftet, und die Abtastwerte sind durch Quadrate markiert.

Die Digitalisierungsabbildung kann also höchstens dann injektiv sein, wenn wir uns auf Funktionen beschränken, an deren Aufbau keine Schwingungen mit einer Frequenz von 22,05 kHz oder höher beteiligt sind. Was das bedeutet, und ob dann wirklich Injektivität gilt, werden wir in der *Höheren Mathematik II* im Kapitel über harmonische Analyse genauer untersuchen.

f) Lineare Abhängigkeit

Im $\mathbb{R}^3$ definieren zwei Vektoren eine Ebene – es sei denn, sie liegen, wenn man sie am gleichen Anfangspunkt beginnen läßt, auf einer Geraden, d.h einer der beiden Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.