Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2002

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Listen mit Berichtigungen und Verbesserungen zusammenstellen.

Literaturhinweise 1

KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME 5

§1: Vektoren und Vektorräume 5
a) Vektoren in der Ebene und im Raum 5
b) Definition des Vektorraums 10
c) Erste Beispiele 13
d) Lineare Abbildungen 16
e) Untervektorräume 19
f) Lineare Abhängigkeit 22
g) Die Dimension eines Vektorraums 30
h) Basen 31
i) Dimensionen und lineare Abbildungen 40

§2: Vektorräume und endliche Körper 42
a) Der Körper mit zwei Elementen 42
b) Bitfolgen als Vektoren 44
c) Der Körper mit vier Elementen 48
d) Körper von Zweierpotenzordnung 50
e) Der Euklidische Algorithmus 53
f) Der Euklidische Algorithmus für Polynome 58
g) Der Körper mit 256 Elementen und CD-Fehlerkorrektur 62
h) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie 65
i) Der diskrete Logarithmus 66

§3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme 69
a) Abbildungsmatrizen 69
b) Rechenregeln für Matrizen 73
c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen 82
d) Das GAUSSsche Eliminationsverfahren 83
e) Erste Beispiele 86
f) Die Struktur der Lösungsmenge 99
g) Affine Räume 105
h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ... 117

§4: Die inverse Matrix 123
a) Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme 124
b) Beispiel einer Matrixinversion 124
c) Eigenschaften invertierbarer Matrizen 127
d) Beispiel eines Basiswechsels 129
e) Der allgemeine Fall 134
f) Die LR-Zerlegung einer Matrix 140

§5: Determinanten 148
a) Das Skalarprodukt und Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ 148
b) Das Spatprodukt 154
c) Forderungen an eine allgemeine Determinante 158
d) Permutationen 160
e) Existenz von Determinanten 168
f) Die Determinante einer Matrix 173
g) Der Entwicklungssatz von LAPLACE 180
h) Die CRAMERsche Regel 189
i) Geschichte und Anwendungen von Determinanten 190

§6: EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume 192
a) EUKLIDische Vektorräume 192
b) HERMITEsche Vektorräume 198
c) Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 201
d) Orthonormalbasen 203
e) Normierte Vektorräume 209

KAPITEL II: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS 213

§1: Funktionen und ihre Ableitungen 213
a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen 213
b) Die Ableitung einer Funktion 220
c) TAYLOR-Reihen 239
d) Der Satz über implizite Funktionen 245

§2: Vektorfelder 250
a) Der Begriff des Vektorfelds 252
b) Die JACOBI-Matrix 253
c) Die Divergenz eines Vektorfelds 254
d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds 257
e) Erste Beispiele 262
1) Das elektrische Feld einer Punktladung 262
2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters 264
f) Allgemeine Rechenregeln 268
g) Nichtkartesische Koordinatensysteme 271
1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ 271
2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ 273
3) Kugelkoordinaten 274

§3: Integralrechnung 277
a) Heuristische Vorüberlegungen 277
1) Integration als Umkehrung der Differentiation 277
2) Integration als Flächenbestimmung 283
3) Integration als Durchschnittsbestimmung 284
b) Integration elementarer Funktionen 285
1) Die Funktion $f(x) = x^2$ 286
2) Die Exponentialfunktion 287
3) Die DIRICHLETsche Sprungfunktion 289
c) Definition des RIEMANN-Integrals 290
1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz? 291
2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden? 291
3) Anwendung des Mittelwertsatzes 294
4) Gleichmäßige Stetigkeit 295
5) Definition einer Approximation für das Integral 298
6) Existenz des RIEMANN-Integrals für stetige Funktionen 301
7) Stückweise stetige Funktionen 307
8) Noch einmal die DIRICHLETsche Sprungfunktion 308
9) Ausblick: Das LEBESGUE-Integral 308
10) Anwendung auf Flächeninhalte 309
d) Erste Integrationsregeln 310
1) Monotonieregel 310
2) Linearität und Zusammensetzung 312
3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 312
e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 314
f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen 317
g) Partielle Integration 329
h) Substitutionsregel 330
1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen 330
2) Substitutionen mit linearen Funktionen 331
3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen 333
4) Integrale der Form $\int h(e^{ax})\,dx$ 335
5) Integrale der Form $\int h(\sin x, \cos x)\,dx$ 337
i) Integration rationaler Funktionen 338

j) Symmetrie 343

k) Einige nicht elementar integrierbare Funktionen 344
1) Der Integralsinus 345
2) Die Fehlerfunktion 345
3) Elliptische Integrale 346
4) Algebraische Integrale 347

l) Uneigentliche Integrale 347

§5: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$ 358

a) Kurven und Tangentenvektoren 358

b) Die Bogenlänge einer Kurve 361

c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve 366

d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder 371

§6: Mehrdimensionale Integrationstheorie 377

a) Flächeninhalte und Volumina 377

b) Integration über Normalbereiche 386

c) Die Transformationsformel 392

d) Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS 403

e) Oberflächenintegrale 409

f) Die Sätze von STOKES und GAUSS 420