

Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2002

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Listen mit Berichtigungen und Verbesserungen zusammenstellen.

Literaturhinweise	1
KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	5
§1: Vektoren und Vektorräume	5
a) Vektoren in der Ebene und im Raum	5
b) Definition des Vektorraums	10
c) Erste Beispiele	13
d) Lineare Abbildungen	16
e) Untervektorräume	19
f) Lineare Abhängigkeit	22
g) Die Dimension eines Vektorraums	30
h) Basen	31
i) Dimensionen und lineare Abbildungen	40
§2: Vektorräume und endliche Körper	42
a) Der Körper mit zwei Elementen	42
b) Bitfolgen als Vektoren	44
c) Der Körper mit vier Elementen	48
d) Körper von Zweierpotenzordnung	50
e) Der Euklidische Algorithmus	53
f) Der Euklidische Algorithmus für Polynome	58
g) Der Körper mit 256 Elementen und CD-Fehlerkorrektur	62
h) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie	65
i) Der diskrete Logarithmus	66

§3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme	69
a) Abbildungsmatrizen	69
b) Rechenregeln für Matrizen	73
c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen	82
d) Das GAUSSSCHE Eliminationsverfahren	83
e) Erste Beispiele	86
f) Die Struktur der Lösungsmenge	99
g) Affine Räume	105
h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	117
§4: Die inverse Matrix	123
a) Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme	124
b) Beispiel einer Matrixinversion	124
c) Eigenschaften invertierbarer Matrizen	127
d) Beispiel eines Basiswechsels	129
e) Der allgemeine Fall	134
f) Die LR-Zerlegung einer Matrix	140
§5: Determinanten	148
a) Das Skalarprodukt und Vektorprodukt im \mathbb{R}^3	148
b) Das Spatprodukt	154
c) Forderungen an eine allgemeine Determinante	158
d) Permutationen	160
e) Existenz von Determinanten	168
f) Die Determinante einer Matrix	173
g) Der Entwicklungssatz von LAPLACE	180
h) Die CRAMERSche Regel	189
i) Geschichte und Anwendungen von Determinanten	190

§6: EUKLIDISCHE und HERMITISCHE Vektorräume	192
a) EUKLIDISCHE Vektorräume	192
b) HERMITISCHE Vektorräume	198
c) Die CAUCHY-SCHWARZSCHE Ungleichung	201
d) Orthonormalbasen	203
e) Normierte Vektorräume	209
KAPITEL II: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS	213
§1: Funktionen und ihre Ableitungen	213
a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen	213
b) Die Ableitung einer Funktion	220
c) TAYLOR-Reihen	239
d) Der Satz über implizite Funktionen	245
§2: Vektorfelder	250
a) Der Begriff des Vektorfelds	252
b) Die JACOBI-Matrix	253
c) Die Divergenz eines Vektorfelds	254
d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds	257
e) Erste Beispiele	262
1) Das elektrische Feld einer Punktladung	262
2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	264
f) Allgemeine Rechenregeln	268
g) Nichtkartesische Koordinatensysteme	271
1) Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2	271
2) Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	273
3) Kugelkoordinaten	274

§3: Integralrechnung	277
a) Heuristische Vorüberlegungen	277
1) Integration als Umkehrung der Differentiation	277
2) Integration als Flächenbestimmung	283
3) Integration als Durchschnittsbestimmung	284
b) Integration elementarer Funktionen	285
1) Die Funktion $f(x) = x^2$	286
2) Die Exponentialfunktion	287
3) Die DIRICHLETSCHES Sprungfunktion	289
c) Definition des RIEMANN-Integrals	290
1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz?	291
2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden?	291
3) Anwendung des Mittelwertsatzes	294
4) Gleichmäßige Stetigkeit	295
5) Definition einer Approximation für das Integral	298
6) Existenz des RIEMANN-Integrals für stetige Funktionen	301
7) Stückweise stetige Funktionen	307
8) Noch einmal die DIRICHLETSCHES Sprungfunktion	308
9) Ausblick: Das LEBESGUE-Integral	308
10) Anwendung auf Flächeninhalte	309
d) Erste Integrationsregeln	310
1) Monotoniegesetz	310
2) Linearität und Zusammensetzung	312
3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	312
e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	314
f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	317
g) Partielle Integration	329
h) Substitutionsregel	330
1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen	330
2) Substitutionen mit linearen Funktionen	331
3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen	333
4) Integrale der Form $\int h(e^{ax}) dx$	335
5) Integrale der Form $\int h(\sin x, \cos x) dx$	337
i) Integration rationaler Funktionen	338

<i>j)</i> Symmetrie	343
<i>k)</i> Einige nicht elementar integrierbare Funktionen	344
1) Der Integralsinus	345
2) Die Fehlerfunktion	345
3) Elliptische Integrale	346
4) Algebraische Integrale	347
<i>l)</i> Uneigentliche Integrale	347
§5: Kurvenintegrale im \mathbb{R}^2	358
<i>a)</i> Kurven und Tangentenvektoren	358
<i>b)</i> Die Bogenlänge einer Kurve	361
<i>c)</i> Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve	366
<i>d)</i> Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder	371
§6: Mehrdimensionale Integrationstheorie	377
<i>a)</i> Flächeninhalte und Volumina	377
<i>b)</i> Integration über Normalbereiche	386
<i>c)</i> Die Transformationsformel	392
<i>d)</i> Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS	403
<i>e)</i> Oberflächenintegrale	409
<i>f)</i> Die Sätze von STOKES und GAUSS	420